R. BIBL. NAZ.
Vitt. Emanuele III.
RACCOLTA
VILLAROSA
B
217(2
NAPOLI

Digitized by Google

14100079.

Racc. Villarosa B. 217(2)

Digitized by Google

OPERE

DI

FRANCESCO MARIA
CAVAZZONI ZANOTTI.

TOMO SECONDO.



R. BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

IN BOLOGNA
NELLA STAMPERIA DI SAN TOMMASO D' AQUINO
MDCCLXXXI.
CON APPROVAZIONE.

Digitized by Google

LO STAMPATORE
A CHI LEGGE.

ECco Lettor corteſe, il ſecondo volume delle opere del celebre Franceſco Maria Zanotti. In eſſo troverai raccolte varie operette Matematiche, altre fino ad ora inedite, altre già date alla pubblica luce a Parigi, a Venezia, a Bologna. Non ti prenda meraviglia, ſe incontrerai fra queſte anche una diſſertazione ſulla ſeparazione delle indeterminate ſtampata già nel terzo tomo dei Commentarj dell' Inſtituto; nè credere perciò, che a multiplicare i volumi della preſente edizione ſi voglia ora riſtampar tutto quello, che è ſtato ſcritto dal Zanotti in quei Commentarj. Dal che oltre molte altre ragioni, dee diſtoglierne pur anche l' eſempio dei raccoglitori delle opere di Fontenelle, i quali non diedero luogo nella loro edizione alla Storia dell' Accademia di Parigi. Per la qual coſa nel pubblicare di nuovo quella diſſertazione ſi è inteſo unicamente di dare un breve ſaggio della nitida, ed elegante maniera, colla quale il Zanotti ſapea trattare gli argomenti più intralciati, ed oſcuri. Ben mi luſingo, che tu, corteſe Lettore, vorrai avere a grado un tale intendimento diretto al tuo piacere, e profitto; e vivi felice.

Digitized by Google

INDICE

Di quanto ſi contiene in queſto ſecondo Volume.

Algorithmus in Epitomam redactus. Pag. 1

De Viribus Centralibus, quibus corpora per ſectiones conicas volvuntur, centro virium in foco manente, brevis & facilis expoſitio in capita ſex diſtributa. 121

Memoire ſur les Figures, & les ſolides circonſcrits au Cercle, & à la Sphère. 227

Opuſculum de Separandis indeterminatis. 245

Præfatio in qua Anonymi animadverſiones in Manfredii Ephemerides expenduntur. 273

ALGORITHMUS

IN EPITOMAM

REDACTUS.

Digitized by Google

AD NOBILISSIMUM

Atque optimum Adoleſcentem

FRANCISCUM RATTAM.

Nihil mihi accidere jucundius potuit, ſuaviſſime Ratta atque optime, quam quod audivi: te in multis honeſtiſſimarum, pulcherrimarumque rerum ſtudiis quotidie verſari, & inter hæc geometriæ eſſe cupidum. Quippe hæc una ad acuenda ingenia, conformandoſque ad reliquas facultates animos jure cenſetur aptiſſima. Atqui interdum vereor (in quo cognoſces amorem meum), ne te forte cum tam multis diſtinearis, ingenio magis, quam otio abundantem, hujus longitudo ſtudii deterreat. Volui ergo me tibi ſocium præbere, vel potius, ut aliquid ætati meæ dem, adjutorem; cumque te primum iam tertiumque Euclidis librum perlegiſſe cognoverim, epitomam neſcio quam ſcripſi, qua te ad algorithmum introducerem; ac ne

ad Euclidem, cujus ratio longior videtur multis atque implicatior, redire opus habeas, ſermones adjunxi duos quam breviſſimos, unum de proportionibus, alterum de magnitudinibus, quæ in geometria conſiderari ſolent, per litteras exprimendis. Speravi enim fore, ut hanc viam tenens neque labore te opprimas, & progreſſus facias celeriores. In quo ſi erravero, quamquam ne id metuam, multorum maximorumque hominum facit auctoritas, tamen, ſi quid erravero, non me pænitebit ex eo, quo te proſequor, amore longe maximo erraviſſe. Sed jam ad rem venio, exordium hinc capiens.

QUantitas quævis quavis littera *a*, *b*, *c* &c. exprimi ſolet. Quod ſi litteræ præfixum ſit ſignum $+$, cenſetur quantitas poni, & poſitiva dicitur; ſi ſignum $-$, negari & tolli, & dicitur negativa. Quare $+a$, $+c$, $+b$ quantitates poſitivæ ſunt; $-a$, $-b$, $-u$ negativæ.

Si cui litteræ ſignum nullum præfixum ſit, cenſetur præfixum $+$.

De

De additione & ſubtractione.

SI cui quantitati alteram velis addere, hanc illi adjunges, ſignum nihil mutans; ſi ſubtrahere, ſeu demere, ſignum ei mutabis, quam ſubtrahis. Ita, ſi quantitati a velis addere $+b$, ſcribes $a+b$; ſi $+c$, ſcribes $a+c$; ſi $-d$, ſcribes $a-d$; ſi ſubtrahere, ſcribes $a-b$, $a-c$, $a+d$.

Quod additione fit, dicitur quantitatum ſumma; quod, facta ſubtractione, remanet, differentia.

Hic iam, ſi expreſſionis forma ſpectetur, quantitates omnes in duo genera diſpertiuntur; aliæque ſimplices dicuntur, aliæ compoſitæ. Simplices ſunt, quæ præter ſignum præfixum, ſeu quod præfixum, cenſetur, ſignum nullum aliud habent, uti a, b, $-c$ &c. Compoſitæ ſunt, quæ ſignum aliquod habent litteris interiectum, uti $a+b$, $c-d$ &c.

Compoſitæ non ſecus adduntur & ſubtrahuntur, ac ſimplices. Ita ſi quantitati $a+b$ velis addere $c+d$, ſcribes $a+b+c+d$, ſigna nihil mutans; ſi ſubtrahere, mutabis ſigna in ea quantitate, quam ſubtrahis. Scribes ergo $a+b-c-d$.

De expurgatione quantitatum compoſitarum.

QUuantitas omnis compoſita terminis conſtat, quorum quiſque præfixo ſigno notatur. Ita quantitas $a+b-c+d$ terminis conſtat a, cui prefixum cenſetur ſignum $+$, $+b$, $-c$, $+d$. Ad expreſſionis, ſcri-

ro dicuntur factores, ſeu multiplicatores, ſive etiam producti latera. Ita numerus 15 dicetur factum, ſeu productum, ſive rectangulum numerorum 3, & 5, quoniam multiplicando 3 per 5 fit 15. Numeri ipſi 3, & 5 dicuntur factores, ſeu multiplicatores, ſive latera numeri 15.

Quantitas, quæ per alteram multiplicatur, in communi mathematicorum ſermone dicitur in eam duci. Ubi ergo dixero *a* ductam in *c*, intelligo *a* multiplicatam per *c*. Atque hæc quidem ad uſum loquendi ſpectant.

Illud ad rem pertinet. Utrovis modo multiplicaveris, ſive *a* per *b*, ſive *b* per *a*, idem productum fiet. Quod in exemplo numerorum 3 & 5 ſatis apparet; fit enim 15, ſive 3 per 5 multiplices, ſive 5 per 3. Sed iam multiplicandi modum explicemus.

De modo multiplicandi.

HIc & ſimplicium quantita, tum & compoſitarum ratio eſt habenda. Dicamus primum de ſimplicibus.

Si quantitates duas ſimplices, uti *a* & *b*, multiplicare inter ſe velis, eas deinceps ſcribes nullo interiecto ſigno, uti *ab;* quo quidem exprimes non *a*, neque *b*, ſed productum illud, quod fit multiplicando *a* per *b*.

Erit autem productum *a b* poſitivum, eique præfiges ſignum +, ſi quantitates, quas multiplicas, *a* & *b*, vel ambæ poſitivæ ſint, vel ambæ negativæ.

Quod

Quod ſi altera poſitiva fuerit, negativa altera, productum ab negativum erit, eique prefigis ſignum $-$. Si ergo multiplicare velis $+a$ per $+b$, ſive $-a$ $-b$, productum pones $+ab$; ſi $+a$ per $-b$, ſive $-a$ per $+b$, productum pones $-ab$. Neque mirari oportet, quod $-a$ ducta in $-b$ productum efficiat poſitivum; quippe, negativa ipſa cum ſit, ſi negative ſumatur, poſitiva evadat neceſſe eſt.

Neque illud prætereundum. Si quantitates multiplicandæ numeros præfixos habeant, producto litterarum præponendum erit productum numerorum, ac tum demum ſignum præfigendum. Quare ſi multiplicare oporteat $3a$ per $2b$, productum pones $6ab$, ſi $3a$ per $-4b$, productum pones $-12ab$.

Producta hæc, e multiplicatione quantitatum ſimplicium orta, ſunt & ipſa, uti manifeſtum eſt, quantitates ſimplices; nec ſecus quam aliæ ſimplices, adduntur, ſubtrahunturve. Multiplicantur etiam eodem modo. Quare ſi multiplicandum tibi ſit ab per c, pones abc; ſi per $-cb$, pones $-abcb$. Adhuc de multiplicatione quantitatum ſimplicium.

Compoſitarum brevior eſt ratio. Multiplicatur enim quantitas quævis compoſita per quamvis aliam, ſi ſinguli unius termini in omnes alterius terminos ducantur, ac producta omnia in ſummam colligantur. Multiplicando igitur $ab+cb$ per $c-d$, pones $abc+ccb-abd-cdb$.

Quamquam pro multiplicatis habentur duæ quantitates compoſitæ, puta $ab+cb$, & $c-d$, etiamſi

ſic

ſic ſcribantur $\overline{ab+cb}\times\overline{c-d}$, ſive $\overline{ab+cb}.\overline{c-d}$.
Quæ ſcriptio aliquando eſt ad uſum commodior.

De poteſtatibus.

SI quantitas quæpiam, puta a, multiplicanda ſit per ſe ipſam, ideſt per a; ex his, quæ haſtenus diximus, ſcribendum erit aa. Ac ſi hoc ipſum aa multiplicandum ſit rurſum per a, ſcribendum erit aaa. Ac ſi hoc ipſum aaa rurſum per a, ſcribendum erit $aaaa$. Ejuſque progreſſus nullus eſt finis.

Ad vitandum ergo faſtidium ſcribendi, pronunciandique tam ſæpe eamdem litteram a, mos invaluit, ut pro aa ſcribatur a^2; pro aaa ſcribatur a^3; pro $aaaa$ ſcribatur a^4 &c. Hinc ſeries efficitur, cui, ne quid ad elegantiam deſit, initium ponunt a^1, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8 &c.

Termini a^1, a^2, a^3 &c. dicuntur poteſtates quantitatis a. Numeri, qui ſupra exſtant ad dexteram, dicuntur exponentes, ſive indices poteſtatum. a^1 dicitur poteſtas prima, & æque valet, ut a; a^2 dicitur poteſtas ſecunda, ſeu quadratum quantitatis a; a^3 poteſtas tertia, ſeu cubus; a^4 poteſtas quarta; a^5 poteſtas quinta &c.

Hinc breviſſima multiplicandarum poteſtatum ratio orta eſt. Etenim ſi duæ ejuſdem quantitatis poteſtates, puta a^2 & a^3, multiplicandæ inter ſe ſint, id fiet ſcribendo ſemel litteram a, eique adjungendo, exponentis loco, ſummam duorum exponentium 2,

Digitized by Google

& 3. Hæc quippe oſtendet, quam ſæpe ſit littera a in multiplicatione illa repetenda. Si ergo multiplices a^2 per a^3, ſcribes a^5; ſi a^3 per a^4, ſcribes a^7; ſi a^1 per a^6, ſcribes a^7 &c.

Hæc adhuc de multiplicatione; quæ tibi volo in promptu eſſe, quo ſis ad ea, quæ ſecuntur, expeditior.

De diviſione.

Dividere quantitatem quamvis a per quamvis b eſt invenire, quoties b ingrediatur in a. Dicitur b diviſor; a dividendum, Numerus, ſeu quantitas, quæ oſtendit, quoties b ingrediatur in a, dicitur quotiens. Dividatur 15 per 3; erit 15 dividendum; 3 diviſor; quotiens vero erit 5; nam 3 ingreditur in 15 quinquies. Hinc patet, quotientem, ſi ducatur in diviſorem, æqualem fieri dividendo.

Diviſio ſic peragitur. Infra dividendum diviſor ponitur, lineola interjecta. Ad dividendum ergo a per b ſcribes $\frac{a}{b}$. Qua quidem ſcriptione intelligi debet non a, neque b, ſed quotiens ille, qui oritur dividendo a per b.

Quotiens ſic expreſſus, uti $\frac{a}{b}$, dicitur quantitas fracta, ſeu fractio. Quantitates aliæ a, b, $c\,d$ &c., de quibus adhuc diximus, dicuntur integræ. Dividendum a, quod ſupra ponitur, vulgo numerator dicitur; diviſor b, qui infra, denominator. Illud ergo

go tritum eſt: quotiens, ductus in denominatorem, efficit numeratorem, ideſt numeratori æqualis eſt.

Quare ſi in fractione cum numerator, tum denominator eodem ſigno affecti ſint, uti in his $\frac{+a}{+b}$, $\frac{-a}{-b}$; quotiens poſitivus ſit oportet; nam negativus ſi eſſet, neque ductus in denominatorem $+b$ efficere poſſet numeratorem $+a$; neque ductus in denominatorem $-b$ efficere poſſet numeratorem $-a$. Pari de cauſa erit quotiens negativus, ſi a & b in fractione ſigna habeant diverſa, puta $\frac{+a}{-b}$, $\frac{-a}{+b}$. His ſane liquet, fractiones $\frac{+a}{+b}$, & $\frac{-a}{-b}$, ſi res ipſa ſpectetur, nihil inter ſe differre; idem eſt enim utriuſque quotiens. Nihilque pariter differunt $\frac{+a}{-b}$, & $\frac{-a}{+b}$.

Ac iam novum, ſi exprimendi ratio attendatur, quantitatum genus occurrit, ideſt fractionum; in quo rurſum, quemadmodum additio, ſubtractio, multiplicatio, atque adeo diviſio ipſa peragendæ ſint, videndum. Quod ſtatim exſequar, ſi conſectariola prius paucula propoſuero. Sed ante moneo ſigno $=$ inter duas quantitates interpoſito ſignificari, eas quantitates pro æqualibus poni. Quare ſi ſcriptum inveneris $a+b=c$, intelliges quantitates duas $a+b$, & c haberi pro æqualibus; ſi $\frac{a}{b}=u$, intelliges fractionem $\frac{a}{b}$ æqualem poni quantitati u. Sed jam conſectariola, quæ dixi, exponamus. CON-

CONSECTARIOLUM I.

Si quantitas quævis a ponatur diviſa per 1, ſic $\frac{a}{1}$, quotiens erit ipſa a; namque ipſa a ducta in denominatorem 1, efficit numeratorem a. Quare nulla eſt quantitas, quæ haberi non poſſit, tamquam fractio, cujus denominator ſit 1.

Si ponatur a diviſa per 2, ſic $\frac{a}{2}$; erit quotiens pars dimidia quantitatis a; hæc quippe bis ſumpta, ideſt ducta in denominatorem 2, facit numeratorem a, Pari modo erit $\frac{a}{3}$ pars tertia; $\frac{a}{4}$ pars quarta &c.

CONSECTARIOLUM II.

Si numerator fractionis per quantitatem quamlibet multiplicetur, per eamdem multiplicabitur et quotiens. Exempli gratia. Sit fractio $\frac{a}{b}$; ejuſque quotientem fac eſſe q. Si multiplicaveris numeratorem a per t, ut fractio evadat $\frac{at}{b}$, multiplicabitur quoque q per t, eritque qt quotiens fractionis $\frac{at}{b}$. Quod ſic oſtendo.

Cum q ſit quotiens fractionis $\frac{a}{b}$, erit $bq=a$; ergo $bqt=at$; ergo qt, ductus in denominatorem b, æqualis eſt numeratori at; eſt igitur qt quotiens

tiens fractionis $\frac{a\,t}{b}$. Quod erat oſtendendum.

Quotiens igitur, ſeu potius fractio ipſa (quid enim eſt aliud fractio ipſa niſi quotiens?) per quantitatem quamlibet multiplicabitur, ſi modo numerator tantum fractionis per eam multiplicetur. Quamquam de fractionum multiplicatione alius erit dicendi locus.

CONSECTARIOLUM III.

SI in fractione cum numerator, tum denominator per eamdem quantitatem multiplicentur, quotiens idem manet. Exempli gratia ſit fractio $\frac{a}{b}$: ejus quotientem fac eſſe q. Si multiplicaveris cum numeratorem a, tum denominatorem b per t, ut fractio evadat $\frac{a\,t}{b\,t}$; erit adhuc q quotiens fractionis $\frac{a\,t}{b\,t}$. Quod ſic oſtendo.

Cum q ſit quotiens fractionis $\frac{a}{b}$, erit $b\,q = a$; ergo $b\,q\,t = a\,t$. Igitur q ductus in denominatorem $b\,t$ æqualis eſt numeratori $a\,t$: ergo q eſt quotiens fractionis $\frac{a\,t}{b\,t}$. Quod erat oſtendendum.

Tibi ergo idem erit $\frac{a}{b}$, quod $\frac{a\,t}{b\,t}$; idem enim eſt quotiens; idemque erit $\frac{c}{d}$, quod $\frac{c\,u}{d\,u}$; idemque $\frac{a\,t}{t}$, quod $\frac{a}{1}$, ideſt a.

Hinc

Hinc artificium ductum eſt, vulgo notiſſimum, reducendi fractiones ad eumdem denominarorem. Habeant fractiones duæ denominatores diverſos, uti $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$: ſi in utraque fractione tum numeratorem, tum denominatorem multiplicaveris per denominatorem fractionis alterius, illas ſcilicet in has convertes: $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, quæ ſane ab illis nihil differunt, habentque ambæ eumdem denominatorem bd. Sic dicuntur fractiones ad eamdem denominationem reduci.

Sed iam quo modo in addendo, ſubtrahendo, multiplicando, atque etiam dividendo fractio quæque tractari debeat, ſive cum fractione altera proponatur, ſive cum quantitate integra, videamus. Quamquam de integris minus eſt laborandum; nulla eſt enim quantitas integra, quin per 1 poſſit dividi, tractarique tamquam fractio. Ubi ergo de quantitatibus fractis expoſuero, nihil te integræ morabuntur.

De additione & ſubtractione fractionum.

FRactio fractioni addi poteſt, vel ſubtrahi duobus modis. Primum ſi alteram adſcribas alteri, de ſignis nihil mutans, ſi vis addere; ſi ſubtrahere, ſignum mutans vel numeratoris, vel denominatoris in ea fractione, quam ſubtrahis. Igitur fractioni $\frac{a}{b}$ addes fractio-

ctionem $\frac{c}{d}$, ſcribens $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$; ſubtrahes ſcribens $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, ſive $\frac{a}{b}+\frac{c}{-d}$.

Modum alterum ſic explico. Fractioncs propoſitæ vel habent ambæ eumdem denominatorem, vel non. Habeant primum eumdem, uti $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{b}$. Si hanc illi vis addere, numeratorem numeratori adde, ac ſummam divide per b, ſic $\frac{a+c}{b}$; ſi ſubtrahere, numeratorem numeratori ſubtrahe, ac differentiam divide per b, ſic $\frac{a-c}{b}$.

Quod ſi fractiones propoſitæ diverſos habeant denominatores, uti $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$; eas prius ad eamdem denominationem reduces, tum ea, quam modo dixi, ratione addes, vel ſubtrahes.

De multiplicatione fractionum.

FRactionem per fractionem multiplicabis, ſi pones productum numeratorum diviſum per productum denominatorum, verbi gratia $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$, ſi pones $\frac{ac}{bd}$; cujus præceptionis hæc ratio eſt.

Fac quotientem fractionis $\frac{a}{b}$ eſſe q; fractionis $\frac{c}{d}$ eſſe t. Illam per hanc muitiplicare nihil aliud erit,

niſi

Digitized by Google

niſi multiplicare q per t, ideſt ponere qt. Atqui hoc ipſum ponis ponens fractionem $\frac{ac}{bd}$; ſiquidem fractionis hujus $\frac{ac}{bd}$ quotiens eſt ipſe qt. Quod ſic oſtendo.

Si eſt q quotiens fractiones $\frac{a}{b}$, erit $bq=a$. Si eſt t quotiens fractionis $\frac{c}{d}$, erit $dt=c$. Ergo erit $bqdt=ac$. Igitur qt ductus in denominatorem bd æqualis eſt numeratori ac. Eſt ergo qt quotiens fractionis $\frac{ac}{bd}$. Quod erat oſtendendum.

De diviſione fractionum.

Quod in uno exemplo proponam, valebit in omnibus. Dividenda ſit fractio $\frac{a}{b}$ per fractionem $\frac{c}{d}$. Multiplica numeratorem illius a per denominatorem hujus d; ac rurſum denominatorem illius b per hujus numeratorem c, ponens $\frac{ad}{bc}$. Confecta erit diviſio. Cujus præceptionis hæc ratio eſt.

Fac quotientem fractionis $\frac{a}{b}$ eſſe q; fractionis $\frac{c}{d}$ eſſe t. Illam per hanc dividere nihil aliud erit, niſi dividere q per t, ideſt ponere $\frac{q}{t}$. Atqui hoc ipſum ponis ponens fractionem $\frac{ad}{bc}$; ſiquidem hujus fractionis $\frac{ad}{bc}$ quotiens eſt $\frac{q}{t}$. Quod ſic oſtendo.

Si eſt

Si eſt q quotiens fractionis $\frac{a}{b}$, erit $bq = a$. Si eſt t quotiens fractionis $\frac{c}{d}$, erit $dt = c$. Ergo erit $adt = cbq$; ac dividendo utramque partem per t erit $ad = \frac{cbq}{t}$. Igitur $\frac{q}{t}$ ductus in denominatorem bc efficit numeratorem ad; ideoque eſt quotiens fractionis $\frac{ad}{bc}$. Quod erat oſtendendum.

De radicibus.

Explicatis fractionibus reſtat, ut de radicibus pauca dicamus. Unaquæque quantitas in ſe ducta aliam efficit. Hæc illius quadratum; illa hujus radix, ſeu radix ſecunda dicitur. Numerus 3 ductus in 3, efficit 9. Eſt ergo 9 quadratum numeri 3; numerus ipſe 3 radix, ſeu radix ſecunda numeri 9

Quod ſi numerus 9 ducatur rurſum in 3, quo fiet 27, dicitur 3 radix tertia numeri 27. Ac ſi hic ipſe numerus 27 ducatur rurſum in 3, quo fiet 81, dicetur 3 radix quarta numeri 81.

Hoc modo ad quintam radicem procedi poteſt, ad ſextam, ad alias atque alias. Hic de ſecundis tantum agam; namque in primis exercitatiunculis hæ fere ſolæ occurrunt; ac multum tibi proderit in his te paullulum exercuiſſe, antequam ad alias accedas.

Expreſſa quantitate quapiam per litteras ſæpe quæritur ejus radix; eaque interdum ſe prodit artificio

ſicio nullo. Quantitatis $a\,a$ nemo non videt radicem eſſe a; quantitatis $a\,a\,b\,b$ eſſe $a\,b$; fractionis $\frac{a\,a}{b\,b}$ eſſe $\frac{a}{b}$. At ſæpe accidit, ut nullo modo ſe prodat; ac tum exprimitur, ſcribendo quantitatem ipſam, eique imponendo ſignum $\surd$, quod ſignum radicale appellatur. Quare $\surd a$ exprimit radicem quantitatis a; $\sqrt{a+t}$ radicem quantitatis $a+t$; $\sqrt{\frac{a}{u}}$ radicem fractionis $\frac{a}{u}$.

Hic illud animadvertas velim. Cujuslibet quantitatis radix (ſecunda quidem, nam de ſecundis tantum loquimur) ſumi poteſt vel poſitive præfixo ſigno $+$, vel negative præfixo ſigno $-$; utrovis enim modo ſumatur, in ſe ducta idem facit; namque pariter & a, & $-a$, in ſe ducta, facit $a\,a$.

Quare etiam radicibus per radicale ſignum expreſſis & $+$ præfigi poteſt, & $-$, ad hunc modum $+\surd a$, & $-\surd a$.

Poſthac radicem cum dixero, eam intellige, quæ radicali ſigno expreſſa ſit.

De radicibus tractandis.

Hic iam, ſi exprimendi ratio ſpectetur, novum oritur quantitatum genus, ideſt radicum. Quæ quo modo tractentur, non longum eſt dicere; ſic enim tractantur, uti quantitates ſimplices. Quare & cuivis

vis quantitati a addes $\surd b$, ſcribendo $a + \surd b$; & ſubtrahes, ſcribendo $a - \surd b$. Neque minus id facies, ſi radix radici, puta radix a radici b, addenda ſit, vel ſubtrahenda; ſcribes enim $\surd b + \surd a$, $\surd b - \surd a$. Sic radices quantitates illas, quæ ſimplices dicuntur, per omnia imitantur; quamquam habent alium quoque multiplicationis, diviſioniſque modum, de quo ſeparatim eſt dicendum.

Atque hic illud præſtat animadvertere radicem quamlibet in ſe duci, ejuſque quadratum fieri, radicali tantum ſigno ſublato. Itaque $\surd q$ in ſe ducitur, ejuſque quadratum fit, ponendo q; ac fit qnadratum $\sqrt{t+u}$, ponendo $t+u$. Quod ipſum per ſe eſt manifeſtum.

De radicum multiplicatione.

Sit radix quævis, puta $\surd q$, multiplicanda per quantitatem quamvis t, ſive etiam $\surd t$. Præter quam quod multiplicare eas potes, tamquam ſint quantitates ſimplices, ac producta ſic ponere: $t\surd q$, $\surd q \surd t$; eſt etiam alia multiplicandi ratio, quæ generali hoc theoremate nititur.

Propoſitis duabus quantitatibus, quæcumque fuerint, a, & b; ſi illarum quadrata aa, & bb ſimul multiplicaveris, quo fiet $aabb$; tum hujus producti radicem poſueris; erit hæc radix æqualis producto ipſarum a & b, nempe producto ab. Et ſane radix producti $aabb$ eſt ab.

Digitized by Google

Propoſitis ergo $\sqrt{q}$ & t, has etiam multiplicare hoc modo poteris. Ambarum quadrata q & tt ſimul multiplica, quo fiet qtt. Tum hujus producti radicem pone $\sqrt{qtt}$; erit ſcilicet hæc radix æqualis producto $t\sqrt{q}$.

Propoſitis ſimiliter $\sqrt{q}$ & $\sqrt{t}$; harum quadrata q, & t ſimul multiplica; ac producti qt radicem pone $\sqrt{qt}$. Erit hæc radix æqualis producto $\sqrt{q}\sqrt{t}$.

Ex hac multiplicandi ratione duo commoda proficiſcuntur. Primum litteras omnes, ſi voles, ſub radicale ſignum coniicies: deinde radicalia duo ſigna ad unum rediges.

De radicum diviſione.

Sit radix quævis, puta $\sqrt{q}$, dividenda per quantitatem quamvis t, vel ſit t dividenda per $\sqrt{q}$, vel etiam $\sqrt{q}$ per $\sqrt{t}$; præterquam quod dividere eas potes, tamquam quantitates ſint ſimplices, ac ponere $\frac{\sqrt{q}}{t}$, $\frac{t}{\sqrt{q}}$, $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{t}}$; eſt etiam alia dividendi ratio, quæ hoc theoremate nititur.

Dividenda ſit quantitas quævis a per quamvis b. Illius quadratum aa divide per hujus quadratum bb, ponens $\frac{aa}{bb}$; tum hujus fractionis $\frac{aa}{bb}$ radicem ſume; erit hæc radix æqualis fractioni $\frac{a}{b}$.

Sit ergo tibi dividenda $\sqrt{q}$ per t. Illius quadratum

tum q divide per hujus quadratum tt, ponens $\frac{q}{tt}$.
Erit $\sqrt{\frac{q}{tt}}$ æqualis fractioni $\frac{\sqrt{q}}{t}$.

Sit rurſum dividenda t per $\sqrt{q}$. Illius quadratum tt divide per hujus quadratum q, ponens $\frac{tt}{q}$.
Erit. $\sqrt{\frac{tt}{q}}$ æqualis fractioni $\frac{t}{\sqrt{q}}$.

Sit dividenda $\sqrt{q}$ per $\sqrt{t}$. Illius quadratum q divide per hujus quadratum t, ponens $\frac{q}{t}$.
Erit $\sqrt{\frac{q}{t}}$ æqualis fractioni $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{t}}$.

Hoc modo & litteras omnes, ſi voles, ſub radicale ſignum coniicies, & radicalia duo ſigna in unum colliges. Quæ duo quidem ſunt commodiſſima.

Hæc fere ſunt, mi Ratta ſuaviſſime, quæ te in præſens ſcire volo; nam quæ abditiora ſunt, explanationemque poſtulant longiorem, ea partim ex uſu, ac per te ipſe intelliges, partim e ſcriptoribus petes, qui iſta fuſius tractaverunt; ad quos tamen accedas nolim, niſi te prius in his, quæ adhuc tradidi, aliquandiu exercueris. Id quod perutiliter, ut ſpero, & magna cum voluptate facies; ſi iis perlectis, quæ mox de proportionibus, ac de magnitudinibus per litteras exprimendis breviter, & ſummatim differam, ad theoremata demonſtranda te conferes. In quibus ubi ſatis diu verſatus fueris, tum vero auctor tibi ſum, ut ad algorithmi ſtudium rurſum te referas, & quæ prætermiſſa a nobis ſunt,

ſuis quæque locis adiungas. Eritque id laboris ſane perexigui; quæ enim ante perceperis, ſua ipſa ſponte in memoriam redibunt; & quæ nova erunt, faciliora multo videbuntur, quam ſi fuiſſent ab initio propoſita. Itaque algorithmos iſtos, qui vulgo circumferuntur, quique omnia ſtatim congerunt, ut dicam quod ſentio, non ſatis probo; videntur enim obruendis ingeniis juvenum, quam informandis aptiores. Sed iam de proportionibus, quod ante pollicitus ſum, tradamus.

De Proportionibus.

Proportio eſt reſpectus, quem habet quantitas ad quantitatem pro eo ut illam plus minuſve continet. Numerus 10 bis continet numerum 5. Numerus 6 ter continet numerum 2. Numerus 7 bis continet numerum 3, & præterea unam ejus tertiam partem. Hi omnes continendi modi proportiones dicuntur.

Proportio dicitur etiam ratio. Quantitas, quæ conſideratur ut continens, & primo loco poni ſolet, dicitur antecedens; altera conſequens; ambæ termini rationis.

Dicitur ratio major minorve pro eo ut antecedens plus minuſve conſequentem continet. Si bis continet, ratio dicitur dupla; ſi ter, tripla; ſi quater, quadrupla &c. Si antecedens dimidiam tantum conſequentis partem continet, ratio dicitur ſubdupla; ſi tertiam, ſubtripla; ſi quartam, ſubquadrupla

Si

Si rationes plures propoſitæ fuerint, verbi gratia: *a* ad *b*, *c* ad *d*, *e* ad *f*, ratio illa, quam habet productum omnium antecedentium *ace* ad productum omnium conſequentium *bdf*, dicitur compoſita ex rationibus illis omnibus, *a* ad *b*, *c* ad *d*, *e* ad *f*.

Si propoſitæ rationes ſint tantum duæ, eæque inter ſe æquales, ut ſi quis propoſuerit *a* ad *b*, ac rurſum *a* ad *b*; ratio compoſita, quæ erit utique *a a* ad *b b*, dicetur duplicata rationis *a* ad *b*. Quo intelligis, rationem duplicatam rationis *a* ad *b* nihil eſſe aliud, niſi rationem illam, quam habet quadratum *a a* ad quadratum *b b*.

Quod ſi propoſitæ rationes tres fuerint, eæque inter ſe æquales, ut ſi quis propoſuerit *a* ad *b*, tum rurſum *a* ad *b*, tum tertio *a* ad *b*; ratio compoſita, quæ ſane erit a^3 ad b^3, dicetur triplicata rationis *a* ad *b*. Quo intelligis, rationem triplicatam rationis *a* ad *b* nihil eſſe aliud, niſi rationem illam, quam habet cubus a^3 ad cubum b^3.

Antequam ultra progredior, unum præſtat animadvertere: ſi quantitates duæ *b*, *c* æquales fuerint, eamdem utraque proportionem habebit ad tertiam quamvis *a*; ac tertia quævis *a* eamdem habebit proportionem ad utramque. Et viciſſim, ſi tertia quævis *a* eamdem habuerit proportionem ad utramque *b*, & *c*; ſive utraque *b*, & *c* eamdem habuerit proportionem ad *a*, oportebit *b*, & *c* æquales eſſe. Quod, vel nemine admonente, per ſe ſatis patet.

De

De Proportionalitate.

Æqualitas duarum rationum dicitur proportionalitas, ſive analogia. Earum termini, ex ordine poſiti, dicuntur proportionales. Sit ratio a ad b æqualis rationi c ad d. Quantitates a, b, c, d, hoc ordine poſitæ, dicentur proportionales; idque ſcribendo ſic exprimes a, $b :: c$, d; legendo autem dices: a eſt ad b, uti c ad d. Antecedentes a, & c dicuntur termini inter ſe homologi; nec non & conſequentes b, & d.

Perſæpe accidit, ut conſequens primæ rationis idem ſit atque antecedens alterius, ut ſi quis ponat a, $b :: b$, c. Tunc proportio continua dicitur; ac tres illæ quantitates a, b, c dicuntur continue proportionales; b quidem media proportionalis inter a, & c; c vero tertia proportionalis poſt a, & b.

Quod ſi conſequens primæ rationis differt ab antecedente alterius, ut cum ponitur a, $b : : c$, d, proportio diſcreta dicitur.

Illud porro manifeſtum eſt. Si eſt a, $b : : c$, d, erit etiam $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; & contra ſi eſt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, erit etiam a, $b : : c$, d. Sed iam theoremata duo, quæ maximo uſui ſunt, exponamus.

Th. I. Si a, $b : : c$, d; productum extremorum a & d æquale eſt producto intermediorum b & c. Quod ſic oſtenditur. Si a, $b : : c$, d; eſt ſane $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Jam

vero

vero ſi hujus æqualitatis pars utraque multiplicetur tum per b, tum per d, manebit æqualitas, exſiſtetque $ad = bc$. Q. e. d.

Id ipſum ſi trasferas ad quantitates tres continue proportionales, ut ſi propoſitum ſit $a, b :: b, c$; invenies productum extremarum a & c æquale eſſe quadrato mediæ b. Quippe erit $ac = bb$.

Th. II. Si duo producta ſunt æqualia, uti $bc = tu$; eorum latera ſunt reciproce proportionalia: ideſt latus quodvis b primi eſt ad latus quodvis t ſecundi, ut latus alterum u ſecundi ad latus alterum c primi. Quod ſic oſtenditur. Cum ſit $bc = tu$; ſi hujus æqualitatis pars utraque dividatur tum per t, tum per c, manebit æqualitas, exſiſtetque $\frac{b}{t} = \frac{u}{c}$; ergo erit $b, t :: u, c$. Q. e. d.

Quod ſi alterum e productis quadratum ſit, ut ſi proponatur $bb = tu$, ſatis patet, fore $t, b :: b, u$, ideoque latera t, b, u hoc ordine ſumpta, eſſe continue proportionalia.

Ex his duobus theorematis certiſſimam habes proportionalitatis notam, tum in quatuor quantitatibus, ſi productum extremarum æquale ſit producto intermediarum, tum in tribus, ſi productum primæ & tertiæ æquale ſit quadrato ſecundæ. Quæ nota ſi abſit, proportjonalitas nulla erit.

De modis quibuſdam argumentandi.

SI quantitates quatuor, certo ordine poſitæ, proportionales ſunt, proportionales quoque erunt, ſi aliter diſponantur; modo id ratione fiat. Hinc aliquot argumentandi modos invexerunt geometræ, quos etiam propriis nominibus diſtinxerunt.

Primum. Si $a, b :: c, d$, recte colliges: $b, a :: d, c$, qui argumentandi modus dicitur invertendo; neque minus: $a, c :: b, d$, qui modus dicitur alternando. Etenim cum ſit $a, b :: c, d$, ideoque $ad = bc$; ex his, quæ paulo ante docui, licebit colligere $b, a :: d, c$; neque minus: $a, c :: b, d$.

Denique ſi $a, b :: c, d$, recte colliges, ſummam $a + b$ eſſe ad b, ut eſt ſumma $c + d$ ad d, nempe $a + b, b :: c + d, d$. Nam cum a contineat b toties, quoties c continet d; ſi ad a adiungas unum b, ut fiat ſumma $a + b$; atque ad c addas unum d, ut fiat ſumma $c + d$, ſumma illa profecto continebit b toties, quoties hæc continebit d; eritque $a + b$, $b :: c + d, d$.

Et quoniam ponendo $a, b :: c, d$, potuit etiam invertendo poni: $b, a :: d, c$, idcirco licebit etiam colligere: $a + b, a :: c + d, c$.

Qui alterutro ex his modis colligit, argumentari dicitur componendo.

Tertio. Summæ ac differentiæ par ratio eſt. Quare ſi $a, b :: c, d$, recte colliges $a - b, b :: c - d . d$; itemque $a - b, a :: c - d, c$. Qui argumentandi modus dicitur dividendo. Eſt

Eſt etiam alius argumentandi modus, quem vocant ex æquo. Hunc ſic explico. Sint ſeries duæ A, C, E &c., B, D, F &c. Sic ſemper procedentes, ut ſit A ad B, uti C ad D; & C ad I, uti E ad F &c. Recte colliges, eſſe primam A ad poſtremam E, ut eſt prima B ad poſtremam F, nempe A, E :: B, F. Etenim cum ſit ratio eadem inter A & B, quæ inter C & D, & inter E & F &c., erit ſane eadem inter primam A & primam B, quæ inter poſtremam E & poſtremam F; eritque A, B :: E, F; & alternando A, E :: B, F.

Iiſdem poſitis recte etiam colliges, eſſe ſummam omnium antecedentium A + C + E &c. ad ſummam omnium conſequentium B + D + F &c., ut eſt unum quodvis antecedens ad ſuum conſequens, puta E ad F: omnino eſſe A+C+E, B + D + F :: E, F. Quod oſtendere longius eſt, quam difficilius. Ac primum cum ſit A, B :: C, D, erit alternando A, C :: B, D; eritque pari ratione C, E :: D, F &c.

Hoc poſito cum ſit A, C :: B, D; erit componendo A + C, C :: B + D, D; atque alternando A + C, B + D :: C, D. Cum ſit ergo ratio C ad D eadem, quæ E ad F, erit A + C, B + D :: E, F; atque hic rurſum alternando habebis iam A + C, E :: B+D, F, ac componendo A+C+E, E::B+D+F. F; unde alternando prodibit illud, quod quæritur: A + C + E, B + D + F :: E, F.

Quædam notanda.

Multa ſunt, eaque notatu digna, quæ ad ſimplices proportiones ſpectant, atque ab omni certo quantitatis genere abſtractas. Horum paucula attingam.

I. Sint quantitates quatuor proportionales a, b, c, d; nempe $a, b :: c, d$. Erit quarta d æqualis producto ſecundæ b, & tertiæ c, diviſo per primam a. Nam cum ſit $a, b :: c, d$, erit $ad = bc$. Ac ſi utramque partem dividas per a, manebit æqualitas, eritque $d = \frac{bc}{a}$.

II. Sint quantitates tres a, b, c continue proportionales; nempe $a, b :: b, c$. Erit tertia c æqualis quadrato ſecundæ b, diviſo per primam a. Nam cum ſit $a, b :: b, c$, erit $ac = bb$. Ac ſi utramque partem dividas per a, manebit æqualitas, eritque $c = \frac{bb}{a}$.

III. Sint quantitates tres continue proportionales a, b, c; nempe $a, b :: b, c$. Erit ſecunda b æqualis radici illius producti, quod ſit multiplicando primam a per tertiam c. Nam cum ſit $a, b :: b, c$, erit $bb = ac$. Ac ſi utriuſque partis radicem ponas b & $\sqrt{ac}$, manebit utique æqualitas, eritque $b = \sqrt{ac}$.

IV. Ratio a ad b; ſi tum a, tum b per eamdem quantitatem t vel multiplicentur, vel dividantur, manet eadem. Etenim eſt $at, bt :: a, b$, neque

que minus $\frac{a}{t}$, $\frac{b}{t}$ :: a, b; quippe eſt, in utroque, productum extremorum æquale producto intermediorum.

V. Si quantitates quatuor proportionales ſint a, b, c, d; nempe a, b :: c, d; proportionales quoque erunt ipſarum poteſtates, ſi modo ejuſdem gradus ſint, eodemque ſumantur ordine. Itaque erit aa, bb :: cc, dd; neque minus a^3, b^3 :: c^3, d^3. Etenim cum ſit a, b :: c, d, erit $ad = bc$. Ac ſi utriuſque partis quadratum effeceris, habebis $a^2 d^2 = b^2 c^2$, unde a^2, b^2 :: c^2, d^2; ſi cubum, habebis $a^3 d^3 = b^3 c^3$; unde a^3, b^3 :: c^3, d^3.

VI. Sint quantitates quatuor propoportionales a, b :: c, d; tum aliæ quatuor e, f :: g, h; ſi illæ per has deinceps multiplicentur, producta quoque erunt proportionalia, erit ſcilicet ae, bf :: cg, dh; oſtendam enim eſſe $aedh = bfcg$ in hunc modum. Cum ſit a, b :: c, d, erit $ad = bc$. Cum ſit e, f :: g, h, erit $eh = fg$. Ergo erit $adeh = bcfg$, vel, quod eodem redit, $aedh = bfcg$.

VII. Sit a, b :: c, d. Sit etiam t, c :: b, u; recte colliges, eſſe a, u :: t, d; quæ dicitur argumentatio ex æqualitate perturbata. Etenim cum ſit a, b :: c. d, erit $ad = bc$; ac cum ſit t, c :: b, u, erit etiam $tu = bc$. Erit ergo $ad = tu$, & a, u :: t, d.

a, b, u
t, c, d

De

De magnitudinibus, quæ in geometria conſiderantur, per litteras exprimendis,

OMnis geometria, quod tute ſcis, Ratta ornatiſſime, in magnitudinibus dimetiendis verſantur; neque eas modo, ut ſingulæ in ſe ſunt, conſiderat; ſed connexiones etiam, quas inter ſe habent, copulationeſque varias ſtudioſiſſime conſectatur, ut alias ex aliis colligens eo tandem perveniat, quo vult. Ex illis autem connexionibus, copulationibuſque, ſi paulo acrius inſpectentur, nulla eſt, quæ non ad additionem, aut ſubtractionem, aut omnino ad eorum aliquid, quæ in algorithmo traduntur, referri poſſit. Perſuaſum eſt igitur multis, ſi magnitudines quædam primæ quibuſvis litteris, ut libuerit, denominentur, magnitudines alias denominari ſic poſſe atque exprimi, ut nexus etiam, quos vel ipſæ inter ſe, vel cum primis illis habent, exprimantur. Si id recte fiat, geometricas res multo facilius per calculos tractari poſſe confidunt, quam quomodo ſi veteribus tractabantur. Itaque mos a Carteſio profectus univerſas iam ſcholas pervaſit.

Videndum eſt nobis igitur, quemadmodum magnitudines illæ, quas geometræ contemplantur, nec non & earum partes nexuſque omnes per litteras poſſint exprimi; quæ quidem doctrina latiſſime patet, ſed ſatis erit ſumma capita attigiſſe. Quod antequam facio, illud moneo: ubi ſcriptum inveneris $AB = a$, ſive $CD = c + b$, ſeu quid ſimile, intelli-

ligas volo, magnitudinem A B denominari a, magnitudinem C D denominari $c + b$. Quo fiet non res obſcurior, ſed ſcriptio brevior.

De magnitudinibus earumque partibus exprimendis.

UBi magnitudinem quampiam per a expreſſeris; ſi aliam ipſi æqualem velis ponere, hanc quoque per a exprimes; ſi duplam, per $2a$; ſi triplam, per $3a$ &c. Quod ſi partem illius dimidiam velis ponere, hanc exprimes per $\frac{a}{2}$; ſi tertiam per $\frac{a}{3}$ &c.

Iam vero ſi magnitudinem poſueris e duabus, pluribuſve coaleſcentem, earum vero, e quibus coaleſcit, unam per a expreſſeris, alteram per b, tertiam per c, totam, quæ ex his coaleſcit, exprimes per ſummam $a + b + c$.

Quod ſi magnitudinem diviſeris in partes plures, puta tres, eamque, quam diviſam habes, denominaveris a; ac partem unam feceris b, partem alteram c, erit tibi pars reliqua denominanda $a - b - c$. Atque hæc quidem reconditum nihil habent.

De rectangulis exprimendis.

DEſcriptio rectanguli multiplicationem quamdam continet, quam ſic explico. Sit rectangulum A C, (*Fig.* 1.) cujus latera A B, B C. Si linea A B, ſibi per-

perpetuo parallela, procedere intelligatur per totam B C; ea certe videbitur toties repeti, quot ſunt elementa lineæ B C, quotcumque demum ea ſint, & qualiacumque; videbitur ergo multiplicari per lineam B C. Et quoniam in illo inceſſu conficiet utique ſpatium rectanguli A C; idcirco illius multiplicationis productum cenſebitur eſſe rectangulum ipſum A C.

Igitur ſi latus A B denominaveris *a*, latus B C *b*; rectangulum ipſum A C denominandum tibi erit *a b*, ex multiplicatione ſcilicet *a* per *b*. Et quoniam ſumi poteſt A B pro altitudine, ſumpta B C pro baſi; idcirco paſſim dicitur rectangulum exprimi multiplicando altitudinem per baſim.

Hinc ſtatim theoremata exſiſtunt nonnulla, quæ in geometria præcipua habentur; neque prætermittenda. Sint duo rectangula A C, D F. Illius altitudo A B $=a$. Baſis B C $=b$. Alterius altitudo D E $=c$. Baſis E F $=d$. Ex his, quæ modo dixi, erit ſane rectangulum A C $=ab$. Rectangulum D F $=cd$. His poſitis ſic ſtatuo.

Primum. Ratio rectanguli A C ad rectangulum D F eſt compoſita e duabus rationibus: altitudinis A B ad altitudinem D E, & baſis B C ad baſim E F; nam eſt utique ratio *a b* ad *c d* compoſita e duabus rationibus *a* ad *c*, & *b* ad *d*.

Secundo. Si duo rectangula A C, D F ſint magnitudine æqualia, erunt altitudines & baſes inter ſe reciproce proportionales; & viciſſim. Nam utique, ſi ſit $ab=cd$, erit $a, c :: d, b$. Et viciſſim ſi ſit $a, c :: d, b$, erit $ab=cd$.

Ter-

Tertio. Si altitudines amborum rectangulorum æquales inter ſe fuerint, erunt rectangula ipſa inter ſe, uti baſes; ac ſi baſes æquales fuerint, erunt rectangula ipſa inter ſe, uti altitudines. Etenim ſi altitudines *a* & *c* ſint æquales, erit utraque $= a$; eritque rectangulum unum $= ab$; rectangulum alterum $= ad$. Eſt autem ab ad ad, uti b ad d, ideſt uti baſis ad baſim. Pari modo ſi baſes b & d ſint æquales, erit utraque $= b$; eritque rectangulum unum $= ab$, rectangulum alterum $= cb$. Eſt autem ab ad cb, uti a ad c, ideſt uti altitudo ad altitudinem.

De quadrato.

NOn eſt dubium, quin, quæ de rectangulo communiter dicta ſunt, ea in quadratum quoque conveniant. Sed quoniam quadratum ambo latera A B, & B C habet æqualia, ideoque eodem modo denominanda; hòc illi erit proprium. Quomodocumque latus unum expreſſeris; ſi expreſſionem hanc in ſe duxeris, magnitudinem quadrati expreſſam habebis. Fac latus B C $= a$; (*Fig.* 2.) erit magnitudo quadrati A C $= aa$.

Quo illud etiam facile intelligitur. Quomodocumque magnitudo quadrati expreſſa fuerit, exprimetur latus per hujus expreſſionis radicem. Magnitudo quadrati ſit $= aa$; latus erit $= a$. Magnitudo quadrati ſit $= at$; latus erit $= \sqrt{at}$, nempe ea li-

nea, quæ in ſe ducta efficit magnitudinem at.

Iam vero ſi quadratum fuerit æquale rectangulo, puta $aa = cd$, erit ſane $c, a :: a, d$; nempe latus quadrati a medium proportionale inter latera rectanguli c & d. Et contra, ſi fuerit latus quadrati a medium proportionale inter latera rectanguli c & d, nempe $c, a :: a, d$; erit procul dubio quadratum æquale rectangulo, ideſt $aa = cd$. Atque hæc ex iis, quæ ſupra diximus, manifeſta ſatis ſunt.

De parallelogrammis exprimendis.

SIt parallelogrammum AC; baſis BC; altitudo BT. (*Fig.* 3.) Non eſt dubium, quin parallelogrammum AC magnitudine æquale ſit rectangulo TC. Si hoc ergo expreſſeris, multiplicando altitudinem BT per baſim BC, eo ipſo expreſſam habebis magnitudinem parallelogrammi AC. Sit parallelogrammi altitudo $TB = a$, baſis $BC = b$. Erit tibi parallelogrammum ipſum $AC = ab$.

Atque huc facile theoremata illa transferuntur, quæ paulo ante in rectangulis demonſtravimus.

De triangulis exprimendis.

SIt triangulum ABC; (*Fig.* 4.) baſis BC; altitudo AT. Non eſt dubium, quin ſi rectangulum fiat, multiplicando altitudinem AT per baſim BC, hujus rectanguli dimidia pars ſit triangulum ipſum ABC.

Si

Si ergo hoc rectangulum feceris, tum diviſeris per 2, expreſſam habebis magnitudinem trianguli A B C. Sit altitudo A T $= a$. Baſis B C $= b$. Erit rectangulum $= ab$; ac triangulum A B C $= \frac{ab}{2}$.

Quod ſi hoc triangulum cum altero D E F (*Fig.* 5.) comparare velis, cujus altitudo D Q $= c$; baſis E F $= d$; habebis ſane triangulum A B C $= \frac{ab}{2}$; rriangulum D E F $= \frac{cd}{2}$. Quare cum ſit $\frac{ab}{2}$ ad $\frac{cd}{2}$, uti ab ad cd; huic facile traducentur theoremata illa, quæ ſupra in rectangulis explicavimus.

De magnitudinibus proportionalibus exprimendis.

Si magnitudines quatuor proportionales ſint, ac primam expreſſeris per a, ſecundam per b, tertiam per c; quartam exprimes per productum ſecundæ & tertiæ diviſum per primam; nempe $\frac{bc}{a}$. Et eſt ſane $a, b :: c, \frac{bc}{a}$.

Si magnitudines tres fuerint continue proportionales; primam autem expreſſeris per a, ſecundam per b; tertiam exprimes per quadratum ſecundæ diviſum per primam; nempe $\frac{bb}{a}$. Et eſt ſane $a, b :: b, \frac{bb}{a}$.

Quod ſi e tribus primam expreſſeris per a, ter-

 tiam

Digitized by Google

tiam per c; ſecundam, ideſt mediam proportionalem exprimes per radicem illius producti, quod fit multiplicando primam per tertiam; nempe $\sqrt{ac}$. Eſt ſane $a, \sqrt{ac} :: \sqrt{ac}, c$.

Atqui ſcire convenit, quæ proportiones in geometria, quibuſque in locis occurrant; quod ſi neſcias; fruſtra erit, quo modo per litteras exprimendæ ſint, cognoviſſe. Ne id autem aliunde tibi petendum ſit, digrediar paululum, ac præcipuos quoſdam fontes monſtrabo, unde proportiones in geometria ducuntur fere omnes.

De figuris rectilineis ſimilibus.

Figuræ duæ rectilineæ A B C D E, (*Fig. 6.*) *a b c d e* dicentur ſimiles, ſi duas habeant conditiones: primum ſi anguli unius æquales ſint angulis alterius, ſinguli ſingulis, ut ſi æquales ſint A & *a*, B & *b*, C & *c* &c.: deinde ſi latera, æquales angulos comprehendentia, ſint propottionalia; ut ſi ſit A B ad B C, ut *a b* ad *b c*; & B C ad C D, uti *b c* ad *c d* &c. Harum conditionum ſi alterutra abſit, figurarum ſimilitudo nulla erit. Quamquam triangula hoc habent proprium, ut ſi una adſit, altera abeſſe non poſſit; quod ſtatim oſtendam, ſi duo theoremata prius poſuero, tamquam lemmata.

LEM-

LEMMA I.

IN triangulo A B C (*Fig.* 7.) ducta ſit recta D E, parallela ad B C, ſecanſque latera A B, A C in D & E. Dico eſſe A D, D B :: A E, E C.

Ut id demonſtretur, ducantur rectæ E B, D C. Duo triangula D E B, D E C erunt ſane æqualia, ut quæ ſuper eadem baſi D E conſtituta ſunt, interque eaſdem parallelas D E, B C; quare eadem erit trianguli A D E ad utrumlibet ratio. Atqui ratio trianguli A D E ad triangulum D B E eſt ratio baſis A D ad baſim D B; quippe ambo hæc triangula æqualem habent altitudinem; ac pari de cauſa ratio trianguli A D E ad triangulum D C E eſt ratio baſis A E ad baſim E C; ergo ratio A D ad D B eadem eſt, quæ A E ad E C; eſtque A D, D B :: A E, E C. Q. e. d.

Coroll. Cum ſit A D, D B :: A E, E C, erit etiam componendo A D + D B, A D :: A E + E C, A E; ideſt A B, A D :: A C, A E; & alternando A B, A C :: A D, A E.

LEMMA II.

IN triangulo A B C ducta ſit recta D E parallela ad B C. ſecanſque latera A B, A C in D & E. Dico eſſe A B B C :: A D, D E.

Ut id demonſtretur, ſumatur B F = D A, (*Fig* 8.) ducaturque F H, parallela ad A C, ſecanſque B C

in H. His poſitis cum ſit B F = D A, ſitque angulus B æqualis angulo A D E, & angulus B F H æqualis angulo A, erunt triangula A D E, F B H omnino æqualia: B F = D A, & B H = D E. Atqui eſt B A, B C :: B F, B H (ex coroll. Lem. I.), ergo B A, B C :: D A, D E. Q. e. d.

Scholion. Conſtat iam, ſi in triangulo A B C (*Fig.* 9.) ducta ſit recta D E, parallela ad B C, ſecanſque latera A B; A C in D & E, eſſe duo triangula A B C, A D E plane ſimilia, namque & habent angulos ſingulos ſingulis æquales, ut patet; & latera circa æquales angulos proportionalia eſſe, e ſuperioribus lemmatis ſatis liquet.

THEOREMA I.

Sint triangula duo A B C, P Q R (*Fig.* 10.) æquiangula; ſintque anguli æquales A & P, B & Q, C & R. Dico ea eſſe ſimilia.

Ut id demonſtretur, ſumatur in A B tractus A V = P Q; ducaturque V T parallela ad B C, ſecanſque A C in T. Cum ſit A V = P Q, & angulus A æqualis angulo P; & angulus A V T æqualis angulo B, ideſt angulo Q; erit triangulum A V T per omnia æquale triangulo P Q R. Atqui triangulum A V T ſimile plane eſt triangulo A B C; ergo etiam triangulum P Q R. Q. e. d.

THEO-

THEOREMA II.

Sint triangula duo A B C , P Q R ; habeantque latera lateribus proportionalia ; ſit A B, B C : : P Q, Q R , & B C, C A : : Q R , R P . *Dico* ea eſſe ſimilia .

Ut id demonſtretur , ſumatur in A B tractus A V = P Q, ducaturque V T , parallela ad B C, ſecanſque A C in T . Cum ſit A B , B C : : A V, V T ; neque minus ſit A B, B C :: P Q, Q R ; ſit autem A V = P Q, erit ſane etiam V T = Q R ; quod manifeſtum per ſe eſt . Pari ratione oſtendetur A T=P R. Erit igitur triangulum A V T æquale per omnia triangulo P Q R . Atqui triangulum A V T ſimile plane eſt triangulo A B C ; ergo etiam triangulum P Q R. Q. e. d.

THEOREMA III.

Sint triangula duo A B C , P Q R ; ſitque angulus A æqualis angulo P ; ac præterea ſit A B , A C :: P Q, P R . Dico triangula A B C , P Q R eſſe ſimilia .

Ut id demonſtretur, ſumatur in A B tractus A V = P Q, ducaturque V T , parallela ad B C , ſecanſque A C in T . Cum ſit A B , A C : : A V , A T ; ſitque etiam A B. A C : : P Q , P R ; erit A V, A T::P Q, P R . Eſt autem A V= P Q ergo etiam A T= P R; quod manifeſtum per ſe eſt . Erit igitur triangulum A V T æquale per omnia triangulo P Q R . Atqui triangulum

angulum A V T ſimile plane eſt triangulo A B C; ergo etiam triangulum P Q R. Q. e. d.

Atque hæc quidem ſunt capita, unde proportiones in geometria oriuntur prope omnes. Ad denominandi rationem revertor.

De induſtria in captandis denominationibus adhibenda.

PRæterea, quæ adhuc diximus, quæque in ponendis denominationibus ſervari oportet, erit etiam induſtria, haud ſane magna, adhibenda, ſed tamen non nulla; cujus rei exempla duo afferam, quæ & idipſum oſtendent, & poſthac etiam uſui erunt.

Exemplum I. Sit triangulum rectangulum A B C. Catheti A *B*, A C. (*Fig.* 11.) Hypotenuſa B C. Si cathetum A B denominaveris a; cathetum A C b; hypothenuſæ denominationem ſic erues. Erit ſane catheti A B quadratum $= aa$; catheti A C $= bb$. Igitur ſumma $aa + bb$ æquabit quadratum hypotenuſæ B C. Erit ergo hypotenuſa B C $= \sqrt{aa + bb}$.

Quod ſi hypotenuſam B C expreſſeris per a; cathetum A B per b; catheti alterius A C denominationem ſic erues. Si hypotenuſæ quadrato aa dempſeris catheti A B quadratum, ideſt bb, erit ſane $aa - bb$ quadratum catheti alterius A C. Erit ergo cathetus ipſe A C $= \sqrt{aa - bb}$.

Exemplum II. Sit tibi exprimenda æqualitas angu-

Digitized by Google

gulorum A & B. A (*Fig.* 12) quovis puncto P lateris A P duc perpendicularem P T ad latus alterum A T. Itemque a quovis puncto V lateris B V duc perpendicularem V H ad latus alterum B H. Satis liquet, ſi fuerit A T, T P : : B H, H V, triangula A T P, B V H fore ſimilia, & angulos A, B æquales. Fac ergo ponas $AT = a$, $TP = b$, $BH = c$, ac tum demum $HV = \frac{bc}{a}$; expreſſam iam habebis proportionalitatem illam, nec non & triangulorum ſimilitudinem, & angulorum A, B æqualitatem.

De theorematum demonſtratione.

His, quæ hactenus dicta ſunt, iam te arbitror, Ratta ornatiſſime, ſatis inſtructum eſſe ad geometriæ theoremata quamplurima, nec non & problemata pertractanda; quamquam, ſi me audies, non prius problemata attinges, quam te paululum in Theorematis exercueris. Quare de his primum dicam.

Theorema eſt propoſitio, quæ demonſtrari poſtulat; eaque vel in æqualitate duarum quantitatum conſiſtit, vel in eo certe, quod ad æqualitatem quamdam ſpectat, de qua ſi conſtet, etiam de theorematis veritate conſtet. Id, quod in exemplis, quæ poſt afferam, ſatis apparebit. Omne igitur ſtudium eo referetur, ut de duarum quantitatum æqualitate perquiratur; quod facile erit, ſi quantitates illæ, de quarum æqualitate agitur, fuerint rite denominatæ;

Digitized by Google

nam denominatio ipſa, an illæ æquales ſint, an quid differant, facile oſtendet, & quantum differant. Idque etiam exempla illuſtrabunt.

Exemplis autem utar non reconditioribus & longe petitis, ſed iis, e quibus propoſitiones perdiſcas geometris familiariſſimas, maximeque neceſſarias. Neque demonſtrationes in ſingulis theorematis abſolvam; ſed inchoabo, quas deinde abſolves ipſe. Neque breviores conſectabor, ut præceptores plerique faciunt; qui, brevitatis laudem paulo nimium ſtudentes, elegantias ex omni parte conquirunt. Quos ego quidem laudare malim, quam ſequi; nam, quod res ipſa me docuit, his, qui primum ad hæc ſtudia ingrediuntur, exercitatio lentior longiorque plus prodeſt, quam elegans feſtinatio.

Sed iam ad theoremata, quæ tibi exemplo erunt, veniamus. In quibus legendis ne quando hæreas, iam nun moneo, me, ubi ſcripſero verbi gratia $\overline{AB}^2$, intelligere quadratum lineæ A B; ac ſi ſcripſero $AB \times CD$ intelligere rectangulum ex A B ducta in C D. Quod ſi numerum quempiam præfixero, intelliges quadratum, vel rectangulum per eum numerum multiplicandum eſſe.

THEO-

THEOREMA I.

Sit linea A B (*Fig.* 13) ſecta, ut lubet, in C. Dico eſſe $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2\,AC \times CB$.

$$\begin{aligned} AB &= a \\ AC &= b \\ CB &= a - b \\ \overline{AB}^2 &= aa \\ \overline{AC}^2 &= bb \\ \overline{CB}^2 &= aa - 2ab + bb \\ AC \times CB &= ab - bb \\ 2\,AC \times CB &= 2ab - 2bb \end{aligned}$$

Demonſtratio. Sit $AB = a$. $AC = b$. Erit $CB = a - b$. Ac iam erit $\overline{AB}^2 = aa$, $\overline{AC}^2 = bb$. $\overline{CB}^2 = aa - 2ab + bb$. $AC \times CB = ab - bb$: idque ductum in 2 erit $= 2ab - 2bb$. Vide iam ergo, an ſit

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2\,AC \times CB$$

ideſt

$$aa = bb + aa - 2ab + bb + 2ab - 2bb.$$

THEOREMA II.

Sit linea A B (*Fig.* 14.) ſecta, ut lubet, in C & D. Dico eſſe $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + 2\,AC \times CD + 2\,AC \times DB + 2\,CD \times DB$.

Digitized by Google

Demonſtratio. Sit $AB = a$. $AC = b$. $CD = c$. Erit $DB = a - b - c$. Ac iam erit $\overline{AB}^2 = aa$. $\overline{AC}^2 = bb$. $\overline{CD}^2 = cc$. $\overline{DB}^2 = aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc$. Eritque $2\,AC \times CD = 2bc$. $2\,AC \times DB = 2ab - 2bb - 2bc$. Ac tandem $2\,CD \times DB = 2ac - 2bc - 2cc$.

$AB = a$
$AC = b$
$CD = c$
$DB = a - b - c$
$\overline{AB}^2 = aa$
$\overline{AC}^2 = bb$
$\overline{CD}^2 = cc$
$\overline{DB}^2 = aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc$
$2\,AC \times CD = 2bc$
$2\,AC \times DB = 2ab - 2bb - 2bc$
$2\,CD \times DB = 2ac - 2bc - 2cc$

Vide iam ergo an ſit

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + 2\,AC \times CD + 2\,AC \times DB + 2\,CD \times DB.$$

Ideſt an ſit

$$aa = bb + cc + aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc + 2bc + 2ab - 2bb - 2bc + 2ac - 2bc - 2cc.$$

THEOREMA III.

Sint duæ lineæ AB, CD (*Fig.* 15) ita ſectæ in E & H, ut ſit AB, CD :: AE, CH. Dico eſſe etiam AB, CD :: EB, HD.

De-

$AB = a$
$CD = b$
$AE = c$
$CH = \frac{bc}{a}$
$EB = a - c$
$HD = \frac{ab - bc}{a}$

Demonſtratio. Sit $AB = a$. $CD = b$. $AE = c$. (*Fig.* 15) Erit CH (ut quæ quarta proportionalis eſt poſt a, b, c) $= \frac{bc}{a}$. Iam vero erit $EB = a - c$, & $HD = b - \frac{bc}{a}$. ſive $\frac{ab - bc}{a}$.

Hic iam facile conſtat, eſſe

$$AB, CD :: EB, HD$$

ideſt

$$a, b :: a - c, \frac{ab - bc}{a}.$$

THEOREMA IV.

Sit ſemicirculus AMB. (*Fig.* 16) Diameter AB. Centrum C. A quovis puncto P diametri ducta ſit perpendicularis PM, ſecans periferiam in M. Dico tres lineas AP, PM, PB eſſe continue proportionales, nempe AP; PM :: PM, PB. Quæ propoſitio nobiliſſima eſt.

$CA = CB = a$
$CP = b$
$AP = a - b$
$PB = a + b$
$PM = \sqrt{aa - bb}$

Demonſtratio. Sit radius CA, ideoque etiam $CB = a$. $CP = b$. Erit iam $AP = a - b$, $PB = a + b$. Denominationem lineæ PM tibi comparabis ad hunc modum. Duc rectam MC, quæ, ut radius circuli, erit & ipſa $= a$. Cum ergo in triangulo rectangulo MPC habeas hypotenuſam $MC = a$, & cathetum $PC = b$ facile invenies cathetum alterum

PM

Digitized by Google

$PM = \sqrt{aa - bb}$. Iam facile intelliges, eſſe

$AP, PM :: PM, PB$

ideſt

$a - b, \sqrt{aa - bb} :: \sqrt{aa - bb}, a + b$.

Invenies enim productum ex $a - b$ & $a + b$ æquale quadrato mediæ $\sqrt{aa - bb}$.

THEOREMA V.

Sint duo triangula ſimilia ABC, DEF. (*Fig.* 17) Dico ea eſſe inter ſe, uti quadrata laterum homologorum. Id ipſum diſtinctius explico. Æquales ſint anguli B & E; ſitque AB, BC :: DE, EF; ideoque latera AB, DE ſint homologa. Dico, triangulum ABC eſſe ad triangulum DEF, uti $\overline{AB}^2$ ad $\overline{DE}^2$. Nempe $ABC, DEF :: \overline{AB}^2, \overline{DE}^2$.

$AB = a$
$BC = b$
$DE = c$
$EF = \frac{bc}{a}$
$\overline{AB}^2 = aa$
$\overline{DE}^2 = cc$
$AL = t$
$ABC = \frac{bt}{2}$
$DEF = \frac{bcct}{2aa}$

Demonſtratio. Sit $AB = a$, $BC = b$, $DE = c$. EF (ut quæ eſt quarta proportionalis poſt a, b, c) $= \frac{bc}{a}$. $\overline{AB}^2 = aa$. $\overline{DE}^2 = cc$.

Triangula porro ipſa ſic exprimes. Sumptis BC, EF pro baſibus, ſint altitudines AL, DV. Facile conſtat, triangula ABL, DEV eſſe ſimilia; nam anguli B, & E ſunt æquales; item ALB, DVE; itaque etiam tertius BAL æqualis tertio EDV. Erit igitur AB, AL :: DE, DV. Sit

Sit ergo $AL = t$. Erit $DV = \frac{ct}{a}$.

Ac ſi iam in utroque triangulo A B C, D E F multiplicaveris altitudinem per baſim, productumque diviſeris per 2, habebis $ABC = \frac{bt}{2}$. $DEF = \frac{bcct}{2aa}$.

Vide iam, an ſit $ABC, DEF :: \overline{AB}^2, \overline{DE}^2$

ideſt

$$\frac{bt}{2}, \frac{bcct}{2aa} :: aa, cc.$$

Comperies ſane, tum extremorum, tum intermediorum producta æqualia eſſe.

THEOREMA VI.

Sit ſemicirculus A M B. (*Fig.* 18) Diameter A B. Centrum C. Secto radio C B bifariam in P, ductaque perpendiculari P M, quæ ſecet periferiam in M, ab extremo puncto A radii C A ducatur A M. Dico eſſe A M duplam lineæ P M, ideſt $AM = 2PM$.

$CB = a$	Demonſtratio. Sit $CB = CA = a$.
$CP = \frac{a}{2}$	Erit $CP = PB = \frac{a}{2}$. $AP = a + \frac{a}{2}$
$AP = \frac{3a}{2}$	$= \frac{3a}{2}$. P M (cum ſit media proportionalis inter A P & P B)
$PM = \sqrt{\frac{3aa}{4}}$	$= \sqrt{\frac{3aa}{4}}$; ac $2PM = 2\sqrt{\frac{3aa}{4}}$
$2PM = \sqrt{3aa}$	$= \sqrt{\frac{12aa}{4}} = \sqrt{3aa}$.
$AM = \sqrt{3aa}$	

Iam

Digitized by Google

Iam vero, expreſſis catheſis P A, P M in triangulo rectangulo A P M, facile invenies hypotenuſam $AM = \sqrt{3aa}$. Quo ſatis liquet eſſe $AM = 2PM$.

THEOREMA VII,

Angulus acutus B A C (*Fig.* 19) ſubſtendatur a recta B C. Ducatur B T perpendicularis ad A C. Dico ſummam $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ eſſe majorem quam $\overline{BC}^2$; exceſſum autem æqualem eſſe ſummæ $2\,\overline{AT}^2 + 2\,TC \times TA$.

$BC = a$
$TC = b$
$BT = \sqrt{aa - bb}$
$TA = c$
$AC = b + c$
$AB = \sqrt{aa - bb + cc}$
$\overline{BC}^2 = aa$
$\overline{AB}^2 = aa - bb + cc$
$\overline{AC}^2 = bb + 2bc + cc$

Demonſtratio. Sit $BC = a$, $TC = b$. Propter angulum rectum B T C invenies $BT = \sqrt{aa - bb}$. Sit $TA = c$. Eritque $AC = b + c$; ac propter angulum rectum A T B invenies $AB = \sqrt{aa - bb + cc}$. Iam ergo habebis $\overline{BC}^2 = aa$. $\overline{AB}^2 = aa - bb + cc$, neque minus $\overline{AC}^2 = bb + 2bc + cc$.

Ac tandem habebis ſummam $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = aa + 2cc + 2bc$. quæ ſane major eſt, quam aa, ideſt quam $\overline{BC}^2$. Exceſſuſque eſt $2cc + 2bc$, ideſt $2\,\overline{AT}^2 + 2\,TC \times TA$.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA VIII.

Angulus obtuſus B A C (*Fig.* 20) ſubtendatur a recta B C. Ducatur B T perpendicularis ad C A productam in T. Dico ſummam $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ eſſe minorem, quam $\overline{BC}^2$; defectum autem æqualem eſſe differentiæ $2\,\overline{AT}^2 - 2\,TC \times TA$. Quæ differentia ſane eſt negativa, cum ſit $TC \times TA$ major quam $\overline{AT}^2$.

$BC = a$
$TC = b$
$BT = \sqrt{aa - bb}$
$TA = c$
$AC = b - c$
$AB = \sqrt{aa - vb + cc}$
$\overline{BC}^2 = aa$
$\overline{AB}^2 = aa - bb + cc$
$\overline{AC}^2 = bb - 2bc + cc$

Demonſtratio. Sit $BC = a$. $TC = b$. Propter angulum rectum B T C invenies $BT = \sqrt{aa - vv}$. Sit iam $TA = c$, eritque $AC = b - c$. ac propter angulum rectum ATB invenies $AB = \sqrt{aa - bb + cc}$. Iam ergo habebis $\overline{BC}^2 = aa$. $\overline{AB}^2 = aa - bb + cc$, neque minus $\overline{AC}^2 = bb - 2bc + cc$.

Ac tandem habebis ſummam $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = aa + 2cc - 2bc$; quæ ſane minor eſt, quam aa, ideſt quam $\overline{BC}^2$. Etenim differt ab aa per $2cc - 2bc$, ideſt per $2\,\overline{AT}^2 - 2\,TC \times TA$, quæ differentia eſt negativa.

ALGORITHMI
PARS ALTERA
Ad Nobiliſſimum Adoleſcentem
FRANCISCUM RATTAM.

NOn dubito, mi Ratta ſuaviſſime, quin quæ tibi de algorithmo paucis ante menſibus tradidi, ea iam, quod ingenium tuum eſt, probe teneas, & uſu atque exercitatione familiaria, ut ita dicam, tibi feceris; quapropter tempus eſſe arbitror, ut illa aperiam, quæ initio prætereunda eſſe duxi, & alium in locum differenda, quo uberiorem habeas hujus artis tractationem. Dicam igitur de poteſtatibus primum, tum de radicibus cujuſvis generis, & pauca attingam de quantitatibus vinculo quovis, ut ajunt, coercitis. Si otium erit, etiam de æquationibus breviſſime tradam. His te ſatis paratum eſſe exiſtimabo ad communis geometriæ problemata diſſolvenda. Illud autem maxime cupio, teque etiam atque etiam rogo, ut quæ hic ſcripta a me erunt, attente perlegas, ac tecum ipſe ſingula mediteris, nec ante ad ea, quæ ſecuntur, progrediaris, quam quæ præceſſerint, probe intellexeris. Quod quidem te moneo,

non

non quod moneri opus habeas, ſcio enim & qua voluntate ſis, & quantum ingenio valeas; ſed eſt hæc præceptoribus monendi conſuetudo.

De poteſtatibus, quarum exponens eſt numerus integer, & poſitivus.

Si poteſtates hujuſmodi duæ ſint ejuſdem quantitatis a, puta a^5, a^3; monui iam ante has ſimul multiplicari, colligendo exponentes ambos 5, & 3 in unum, ſcribendoque a^8. Et ſane pro multiplicatis haberentur a^5 & a^3, ſi littera a quinquies ſcripta rurſum deinceps ter ſcriberetur, ideſt ſi ſcriberetur octies.

E contrario ſi altera per alteram dividenda ſit, puta a^5 per a^3; id fiet adimendo hujus exponentem exponenti illius, ſcribendoque a^{5-3}, ldeſt a^2. Et eſt ſane $\frac{a^5}{a^3}=a^2$; quæ æqualitas ſtatim ſe prodit, ſi multiplices utramque partem per a^3. Quod ſi dividenda ſit a^3 per a^5; præcepto inſiſtens eodem, pones a^{3-5}, ideſt a^{-2}. unde poteſtas exiſtet cum exponente negativo; de quo genere infra explicabo.

Si poteſtas quævis propoſita, puta a^2, evehenda ipſa ſit ad poteſtatem ſecundam, id fiet utique, multiplicando ejus exponentem per 2, ponendoque a^4. Et ſane eſſet a^2 ad poteſtatem ſecundam evecta, ſi bis deinceps ſcriberetur $a\,a$, ideſt quater ſcriberetur littera a. Ac pari ratione ſi ſit a^2 evehenda ad

ad poteſtatem tertiam, multiplicabitur exponens ejus 2 per 3, poneturque a^6; ſi ad quartam, per 4; poneturque a^8. Omninoque multiplicabitur exponens per eum numerum, qui gradum poteſtatis indicat, ad quam poteſtas propoſita evehenda eſt.

De poteſtatibus cum exponente negativo.

Antequam ad propoſitum venio, res ipſa poſtulat, ut de numeris negativis pauca dicamus. Negativi numeri vis omnis in eo eſt, ut contrarium numerum tollat. Numerus -2 tollit 2; -3 tollit 3; &c. Negativis his numeris invectis, univerſa numerorum ſeries ex utraque parte in infinitum excurrit

&c., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c.

Qua in ſerie ſi cuivis termino unitatem addas, is æqualis illi fiet, qui ipſi eſt ad dexteram. Sic 2, unitate addita, fit 3; item 1, unitate addita, fit 2; item 0, unitate addita, fit 1; item -1, unitate fit 0; item -2, unitate addita, fit -1, &c. Eaque re apparet, terminos omnes ſeriei hujus, procedendo a dextera ad ſiniſtram, eſſe, alium alio, minores; minoremque eſſe 1, quam 2; & 0, quam 1; & -1, quam 0; & -2, quam -1, &c.

Iam vero exponentibus ex utraque parte excurrentibus in infinitum, poteſtates quoque ipſæ ex utraque parte in infinitum excurrunt ad hunc modum

&c. a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, &c.

Hinc illæ exſiſtunt poteſtates a^0, a^{-1}, a^{-2}, aliæque, quæ

quæ exponentem habent negativum.

Hic inquiet aliquis. Eſt a^2 illud ipſum, quod ex mathematicorum inſtituto ſignificaret littera a, ſi duabus deinceps vicibus ſcriberetur; & a^3 illud ipſum, quod ſignificaret littera a, ſi tribus ſcriberetur vicibus. Quid ergo ſit a^0? Nam ſi ſcribatur littera a vicibus o, ne ſcribetur quidem. Quid porro ſit a^{-1}, aut a^{-2}, aut a^{-3}, cum ſcribi littera a vicibus aut -1, aut -2, aut -3 non poſſit?

Ad hæc ſic repono. Ut ſcribi littera a non poſſit, neque vicibus o, neque vicibus -1, aut -2 &c., puta tamen poſſe. Non eſt novum, neque mathematicorum conſuetudine alienum, quæ fieri non poſſunt, ea putare facta eſſe, ac, ſi facta ſint, quid inde ſequatur, perquirere. Spatia duo ſolida penetrare in ſe mutuo non poſſunt. Id tamen fieri in ſpatiis quibuſdam Euclides fingit, animadvertitque, ſi id fiat, illa ſibi mutuo congruere; quo æqualitatem oſtendit. Nemo eſt, quin pro impoſſibilibus habeat $\sqrt{-7}$, & $\sqrt{-2}$; tamen convenit inter omnes, ſi radices eæ ſint, ac ſimul multiplicentur, ex iis effici $-\sqrt{14}$. Hujus generis exempla innumerabilia afferri poſſunt. Puta igitur, litteram a ſcribi poſſe vicibus o, aut -1, aut -2, &c. non ſecus quam ſcribi poteſt vicibus 1, aut 2, aut 3 &c. Hinc ſtatim intelliges tria conſequi.

Primum illud. Poteſtates duæ quævis ejuſdem quantitatis a; etiamſi exponentem negativum habeant, non ſecus multiplicabuntur, atque illæ, quæ ex-

exponentes habent poſitivos, ideſt colligendo exponentes ambos in unum. Multiplicanda ſit ergo a^{-2} per a^{-5}, pones a^{-2-5}, ideſt a^{-7}. Multiplicanda ſit a^{-3} per a^{7}, pones a^{-3+7}, ideſt a^{4} &c.

Secundo illud. Poteſtates duæ quævis quantitatis ejuſdem a dividentur altera per alteram, ſi exponens hujus adimatur exponenti illius, etiamſi exponentem negativum habeant. Dividenda ſit ergo a^{-2} per a^{-5}, pones a^{-2+5}, ideſt a^{3}. Dividenda ſit a^{-4} per a^{-2}, pones a^{-4+2}, ideſt a^{-2}. Dividenda ſit a^{4} per a^{-3}, pones a^{4+3}, ideſt a^{7}; &c.

Tertio illud. Si poteſtas quævis exponentem habens negativum evehenda ipſa ſit ad poteſtatem aliquam, id fiet, ſi ejus exponens per eum numerum multiplicabitur, qui gradum illius poteſtatis indicat, ad quam evehenda eſt. Evehes ergo a^{-2} ad poteſtatem ſecundam, ſi exponentem -2 multiplicaveris per 2, ac pones a^{-4}; ad tertiam, ſi per 3, ac pones a^{-6}; ad quartam, ſi per 4, ac pones a^{-8}; &c.

De valoribus ſingularum poteſtatum a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} &c.

Antequam de his dico, præſtat unum ponere de poteſtate a^{0}. Dico igitur eſſe $a^{0}=1$. Idque ſic oſtendo. Eſt utique $a^{2}, a^{1} :: a^{1}, a^{0}$; quippe quia, ſi multiplicaveris a^{2} per a^{0}, efficies a^{2}; neque minus efficies a^{2}, ſi multiplicaveris a^{1} per a^{1}. Atqui eſt etiam $a^{2}, a^{1} :: a^{1}, 1$, uti manifeſtum eſt; ergo eſt $a^{0}=1$.

Hoc

Hoc poſito dico eſſe $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$; nam ſi utramque æquationis hujus partem multiplicaveris per a^1, ex altera parte habebis a^0, ex altera 1, quæ duo, ut modo oſtendi, ſunt æqualia.

Dico etiam eſſe $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; nam ſi utramque hujus æquationis partem multiplicaveris per a^2, habebis, hic quoque, hinc a^0, hinc 1.

Dico tertio eſſe $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; nam ſi utramque æquationis partem multiplicaveris per a^3, hic quoque habebis $a^0 = 1$.

Eademque ratione oſtendetur eſſe $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$, & $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$, &c.

Locus monet, ne illud præteream. Quemadmodum eſt $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ita eſt etiam $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$; quippe, ſi utramque partem multiplicaveris per a^{-2}, habebis $a^0 = 1$. Quæ certiſſima eſt æqualitas. Eodemque modo invenies $a^3 = \frac{1}{a^{-3}}$, & $a^4 = \frac{1}{a^{-4}}$, &c. Sed iam ad alia pergamus.

De poteſtatibus, quarum exponens eſt numerus fractus.

Occurrunt perſæpe poteſtates, quarum exponens eſt numerus fractus, uti $a^{\frac{2}{3}}$, $b^{\frac{4}{5}}$, &c. De his etiam eſt dicendum. Ac ſtatim manifeſtum eſt, ad poteſtates hujuſmodi illa omnia transferri poſſe, quæ adhuc diximus de poteſtatibus exponentem negativum habentibus.

Itaque ſi duæ ſint poteſtates ejuſdem quantitatis a, habentes exponentem fractum puta $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{4}{5}}$, eas inter ſe multiplicabis exponentes ambos in unam ſummam colligendo ſic $a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}$, ſive $a^{\frac{22}{15}}$.

Quod ſi altera per alteram dividenda ſit, puta $a^{\frac{2}{3}}$ per $a^{\frac{4}{5}}$, id efficies adimendo exponentem hujus exponenti illius ſic $a^{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}$, ſive $a^{\frac{-2}{15}}$.

Ac ſi poteſtas quæpiam exponentem habens fractum evehenda ipſa ſit ad poteſtatem aliquam; id efficies multiplicando ejus exponentem per eum numerum, qui indicat poteſtatem, ad quam eſt evehenda. Itaque evehes $a^{\frac{1}{3}}$ ad poteſtatem ſecundam multiplicando exponentem $\frac{1}{3}$ per 2, ſcribendoque $a^{\frac{2}{3}}$. Evehes ad tertiam, mutiplicando exponentem $\frac{1}{3}$ per 3, ſcribendoque $a^{\frac{3}{3}}$, ſive a^{1}, ideſt a. Evehes ad quartam, multiplicando exponentem $\frac{1}{3}$ per 4, ſcribendoque $a^{\frac{4}{3}}$, &c. His

His rebus apparet, poteſtatum omnium, ſive exponentem poſitivum habeant, ſive negativum, ſive integrum, ſive fractum, unam eamdemque rationem eſſe.

Quamquam in his, quæ exponentem habent fractum, illud præcipue conſiderari volo. Poteſtas quævis, exponentem fractum habens, evehitur ad poteſtatem illam, quam denominator exponentis indicat, denominatore ipſo abiecto. Sic poteſtatem $a^{\frac{2}{3}}$ ad poteſtatem tertiam evehes, abiiciens denominatorem 3, ſcribendo a^2. Etenim denominatorem 3 abiiciens perinde facis, ut ſi exponentem ipſum $\frac{2}{3}$ multiplicares per 3. Sic poteſtas $a^{\frac{3}{5}}$ evehetur ad poteſtatem quintam, ſi abiecto denominatore 5, ſcribatur tantum a^3.

Ea re patet, cujuſvis quantitatis radicem quamlibet poni, ſi modo ejus exponens per eum numerum dividatur, qui genus radicis indicat. Sic quantitatis a^2 pones radicem tertiam, ſi ſcripſeris $a^{\frac{2}{3}}$; quippe $a^{\frac{2}{3}}$ evecta ad poteſtatem tertiam efficit a^2. Sic quantitatis a^3 pones radicem quintam, ſi ſcripſeris $a^{\frac{3}{5}}$; quippe $a^{\frac{3}{5}}$ evecta ad poreſtatem quintam efficit a^3. Quæ omnia, ſi attentius conſiderentur, verbis declarari non indigent. Ac iam res ipſa ad radices nos deduxit.

De radicum exprimendarum ratione.

Duobus modis radix quælibet cujuſvis quantitatis poteſt exprimi. Primum, ſi, ut modo dixi, exponens quantitatis per eum numerum dividatur, qui genus radicis indicat. Sic radix tertia quantitatis, verbi gratia, a^2 exprimetur per $a^{\frac{2}{3}}$; radix quinta per $a^{\frac{2}{5}}$; radix ſeptima per $a^{\frac{2}{7}}$, &c.

Deinde, ſi quantitati radicale ſignum imponatur, eique ad ſiniſtram ſuperponatur numerus, qui indicat genus radicis. Sic radix tertia quantitatis a^2 exprimetur per $\sqrt[3]{a^2}$; radix quinta per $\sqrt[5]{a^2}$; radix ſeptima per $\sqrt[7]{a^2}$, &c.

Quo loco duo præſtat animadvertere. Primum. Si quantitas, quæ ſub ſigno radicali jacet, evehatur ad poteſtatem quampiam; radix etiam ipſa ad eamdem poteſtatem evecta erit. Sic evehes $\sqrt[3]{a^2}$ ad poteſtatem verbi gratia quartam, ſi ad poteſtatem quartam evexeris quantitatem a^2, ac ſcripſeris $\sqrt[3]{a^8}$. Etenim eſt certe $\sqrt[3]{a^2}$ idem atque $a^{\frac{2}{3}}$. Hanc vero ſi ad quartam poteſtatem velis evehere, ſcribes $a^{\frac{8}{3}}$, ideſt $\sqrt[3]{a^8}$. Quæ ratio manat latiſſime, valetque ad caſus omnes.

Secundo. Si radix quæpiam evehenda ſit ad poteſtatem ejus gradus, cujus radix ipſa eſt, ad id ſatis erit radicale ſignum abiicere. Sic evehes $\sqrt[3]{a^2}$ ad poteſtatem tertiam, abiicendo radicale ſignum ſcribendoque tantum a^2. & $\sqrt[5]{a}$ ad poteſtatem quintam, abiiciendo radicale ſignum, ſcribendoque tantum a. Quod ipſum manifeſtum per ſe eſt. *De*

De radicibus ad idem genus reducendis.

Sint radices duæ diverſorum generum, tertia verbi gratia, uti $a^{\frac{2}{3}}$, & quinta, uti $b^{\frac{4}{5}}$. Has reduces ad idem genus, ſi exponentes ambos $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ ad eumdem denominatorem revocaveris, ac ſcripſeris $a^{\frac{10}{15}}$ & $b^{\frac{12}{15}}$. Sunt enim hæ radices ejuſdem generis, quippe ambæ quintæ decimæ; ac cum ſit $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, erit $a^{\frac{10}{15}} = a^{\frac{2}{3}}$, cumque ſit $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, erit $b^{\frac{12}{15}} = b^{\frac{4}{5}}$.

Quod ſi radices per radicalia ſigna expreſſæ fuerint, uti $\sqrt[3]{a^2}$, & $\sqrt[5]{b^4}$, res eodem redibit, ut per ſe ſatis patet, ſi numeros 3 & 2 multiplicaveris per 5, & viciſſim numeros 5 & 4 per 3; ac ſcripſeris $\sqrt[15]{a^{10}}$ & $\sqrt[15]{b^{12}}$; quæ ſane idem omnino ſunt, atque $a^{\frac{10}{15}}$ & $b^{\frac{12}{15}}$.

De radicibus multiplicandis.

Poteſt ſane radix quælibet per quantitatem aliam quamlibet multiplicari itidem ut quantitates omnes ſimplices. Sic multiplicabitur $\sqrt[3]{a}$ per t, ſcribendo $t\sqrt[3]{a}$; & $\sqrt[2]{a}$ per $\sqrt[5]{b}$ ſcribendo $\sqrt[2]{a}\ \sqrt[5]{b}$. Sed alia eſt etiam multiplicandi ratio, ad uſum perſæpe commodior, quæ generali hoc theoremate nititur.

Sint quantitates duæ quævis t, & u. Evehan-

tur ambæ ad poteſtatem eamdem, ac tum ſimul multiplicentur. Radix hujus producti (illa quidem, quæ ejuſdem eſt gradus, cujus eſt poteſtas, ad quam t & u evectæ ſunt) erit ſemper æqualis producto tu. Evehe t & u ad poteſtatem ſecundam, habebiſque $ttuu$, cujus producti radix ſecunda æqualis eſt, ut patet, producto tu. Evehe t & u ad poteſtatem tertiam, habebiſque $tttuuu$, cujus producti radix tertia æqualis eſt producto tu. Quæ ratio, ut facile conſtat, in infinitum abit.

Hoc poſito licebit iam radicem quamlibet, puta $\sqrt[3]{a}$, multiplicare per quantitatem quamlibet b hoc modo. Utramque evehe ad poteſtatem tertiam; habebiſque a & b^3. Igitur producto ab^3 pone radicem tertiam, ideſt $\sqrt[3]{ab^3}$. Erit hæc ſane æqualis producto ex $\sqrt[3]{a}$, & b. Eadem ratione multiplicabis $\sqrt[2]{a}$ per b, ſi utramque evexeris ad poteſtatem ſecundam, ac ſcripſeris $\sqrt[2]{ab^2}$. Item $\sqrt[4]{a}$ per b, ſi utramque evexeris ad poteſtatem quartam, ac ſcripſeris $\sqrt[4]{ab^4}$. &c.

His facile intelliges, quemadmodum poſſis quantitatem b ſub radicale ſignum coniicere, atque etiam, ſi libuerit, extra ſignum ponere. Eſt enim $b\sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{ab^2}$, ideoque poteſt expreſſio altera adhiberi pro altera. Sic eſt $b\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{ab^3}$; neque minus $b\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{ab^4}$; & $b\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{ab^5}$, &c.

Expeditiſſima autem erit ratio multiplicandi ſimul duas radices, quæ ejuſdem ſint generis, ſi ex eo, quod modo poſui, theoremate multiplicentur.

Ad

Ad id enim ſatis erit, ſi quantitates, quæ ſub ſignis ſunt, ſimul multiplicentur, ac producto imponatur ſignum ambarum commune. Sic multiplicabis $\sqrt[2]{a}$ per $\sqrt[2]{b}$, ſi ſcripſeris $\sqrt[2]{ab}$; & $\sqrt[3]{a}$ per $\sqrt[3]{b}$, ſi ſcripſeris $\sqrt[3]{ab}$; & $\sqrt[4]{a}$ per $\sqrt[4]{b}$, ſi ſcripſeris $\sqrt[4]{ab}$, &c.

De radicibus in diviſionem venientibus.

Non eſt dubium, quin radix quæque in diviſionem ſic veniat, tamquam quantitas quævis ſimplex. Divides ergo $\sqrt[2]{a}$ per b, ſcribendo $\frac{\sqrt[2]{a}}{b}$, ſive b per $\sqrt[2]{a}$, ſcribendo $\frac{b}{\sqrt[2]{a}}$. Sed alia eſt etiam diviſionis ratio, quæ generali hoc theoremate nititur.

Sit quantitas quævis t dividenda per quamvis u. Evehantur ambæ ad eamdem poteſtatem, ac tum illa per hanc dividatur. Radix hujus fractionis (illa quidem, quæ ejuſdem gradus eſt, ac poteſtas, ad quam t & u evectæ ſunt) erit ſemper æqualis fractioni $\frac{t}{u}$. Evehe t & u ad poteſtatem ſecundam, habebiſque $\frac{tt}{uu}$, cujus fractionis radix ſecunda eſt, ut facile conſtat, æqualis fractioni $\frac{t}{u}$. Evehe t & u ad poteſtatem tertiam, habebiſque $\frac{ttt}{uuu}$, cujus fractionis radix tertia æqualis utique eſt fractioni $\frac{t}{u}$. Eaque ratio in infinitum procedit.

Hoc

Digitized by Google

Hoc poſito, licebit iam radicem quamlibet, puta $\sqrt[3]{a}$, dividere per quantitatem quamlibet b. evehendo utramque ad poteſtatem tertiam, ponendoque fractionis $\frac{a}{b^3}$ radicem tertiam, ideſt $\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}$; erit quippe $\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{b}$. Eodemque modo dividetur b per $\sqrt[3]{a}$, ſi evehatur utraque ad poteſtatem tertiam, ac tum ponatur fractionis $\frac{b^3}{a}$ radix tertia, ideſt $\sqrt[3]{\frac{b^3}{a}}$; erit quippe $\sqrt[3]{\frac{b^3}{a}} = \frac{b}{\sqrt[3]{a}}$.

Sic etiam divides $\sqrt[2]{a}$ per b, ſive b per $\sqrt[2]{a}$; ſi utramque evexeris ad poteſtatem ſecundam, ac ſcripſeris $\sqrt[2]{\frac{a}{b^2}}$, ſive $\sqrt[2]{\frac{b^2}{a}}$. Erit quippe $\sqrt[2]{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt[2]{a}}{b}$, itemque $\sqrt[2]{\frac{b^2}{a}} = \frac{b}{\sqrt[2]{a}}$.

Pari ratione divides $\sqrt[4]{a}$ per b, ſive b per $\sqrt[4]{a}$, ſi utramque evexeris ad poteſtatem quartam, ac ſcripſeris $\sqrt[4]{\frac{a}{b^4}}$, ſive $\sqrt[4]{\frac{b^4}{a}}$. Erit quippe $\sqrt[4]{\frac{a}{b^4}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{b}$, itemque $\sqrt[4]{\frac{b^4}{a}} = \frac{b}{\sqrt[4]{a}}$.

Atque his rebus facile intelliges, quemadmodum poſſis quantitatem b ſub radicale ſignum coniicere, atque etiam, ſi velis, extra ponere.

Erit etiam ex eo, quod modo dixi, theoremate ratio expeditiſſima dividendi radicem quamvis per quamvis aliam, ſi ambæ modo ejuſdem ſint generis.

Ad

Ad id enim ſatis erit, quantitatem, quæ ſub ſigno illius eſt, dividere per quantitatem, quæ eſt ſub ſigno alterius, fractionique imponere commune ſignum ambarum. Sic divides $\sqrt[2]{a}$ per $\sqrt[2]{b}$, ſcribendo $\sqrt[2]{\frac{a}{b}}$; itemque $\sqrt[3]{a}$ per $\sqrt[3]{b}$, ſcribendo $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; itemque $\sqrt[4]{a}$ per $\sqrt[4]{b}$, ſcribendo $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, &c.

De quantitatibus ſub vinculo poſitis.

Occurrunt paſſim quantitates quædam compoſitæ, quibus ſuperſtat lineola cum numero ad dexteram adiuncto, uti $\overline{a+b}^2$. Lineola dicitur vinculum; numerus 2 exponens vinculi; iſque indicat poteſtatem, ad quam cenſetur evecta quantitas $a+b$, quæ ſub vinculo jacet. Eſt ergo $\overline{a+b}^2$ idem atque $a+b$ evecta ad ſecundam poteſtatem, $\overline{a+b}^3$ idem atque $a+b$ evecta ad poteſtatem tertiam, &c.

Quantitates vinculo expreſſæ, tamquam ſimplices, haberi poſſunt; quare ſi ſit quantitas $\overline{a+b}^2$ multiplicanda per quamvis t, id utique fiet ſcribendo $t \,.\, \overline{a+b}^2$.

Atqui poterit etiam littera t ſub vinculum conjici ad hunc modum. Dividatur exponens litteræ t per exponentem vinculi: ſic $t^{\frac{1}{2}}$; tum multiplicetur per $a+b$, ſcribaturque $\overline{a\,t^{\frac{1}{2}}+b\,t^{\frac{1}{2}}}^2$. Eſt enim hoc nihil

nihil aliud, niſi poteſtas ſecunda illius producti, quod fit ex $t^{\frac{1}{2}}$ & $a+b$; hæc autem, ut facile patet, nihil eſt aliud, niſi poteſtas ſecunda quantitatis $t^{\frac{1}{2}}$ ducta in poteſtatem ſecundam quantitatis $a+b$, ideſt $t.\overline{a+b}^{2}$. Pari modo, ſi occurrat $t^3.\overline{a+b}^{4}$, poteris litteram t ſub vinculum coniicere, ſcribendo ſcilicet $\overline{a\,t^{\frac{3}{4}}+b\,t^{\frac{3}{4}}}^{4}$; ſi $t^2.\overline{a+b}^{5}$, ſcribendo $\overline{a\,t^{\frac{2}{5}}+b\,t^{\frac{2}{5}}}^{5}$. Valet enim in omnibus par ratio.

Contra ſi quantitas, quæ ſub vinculo jacet, ducta ſit in quantitatem quampiam t, uti ſi occurrat $\overline{a\,t+b\,t}^{2}$, poteris, ſi voles, litteram t e vinculo educere, & extra ponere, modo exponentem ejus multiplices per exponentem vinculi: ſic $t^2.\overline{a+b}^{2}$. Et ſane ſi hic velis litteram t rurſum ſub vinculum coniicere ea ratione, quam modo docui, redibit tibi $\overline{a\,t+b\,t}^{2}$. Pari modo ſi occurrat $\overline{a\,t^3+b\,t^3}^{2}$, poteris litteram t e vinculo educere, ſcribendo ſcilicet $t^6.\overline{a+b}^{2}$. Si $\overline{a\,t^2+b\,t^2}^{4}$, ſcribendò $t^8.\overline{a+b}^{4}$, &c.

Non libuit mihi, quod multi faciunt, neque hic, neque alibi, per exempla vagari quamplurima. Tuum erit, mi Ratta ſuaviſſime, multa tibi fingere, in iiſque ſæpius verſari; quo & regulas ipſas, præceptioneſque, quas adhuc tradidi, melius intelliges, fieſque promtior ad omnia.

De

De æquationibus & præcipuis earum proprietatibus.

ÆQuatio eſt poſitio duarum quantitatum, quas æquales eſſe volumus. Idque ſignificamus duabus lineolis interpoſitis hoc modo $a = b$, ſive $ab + bc = ab$, quo oſtendimus velle nos, duas quantitates a & b, ſive $ab + bc$, & ab æquales inter ſe eſſe.

Quod ſi æqualitas poſita vera eſt, poteſt æquatio multis & variis modis verſari, ſic utique ut æqualitas ſemper maneat. Quos modos juvat ſtatim cognoſcere. Ac primum ſi pars utraque æquationis eadem quantitate vel augeatur, vel minuatur, manet certe æqualitas; neque minus, ſi per eamdem quantitatem vel multiplicetur, vel dividatur. Atque etiam, ſi utriuſque partis eadem ejuſdemque generis ſive poteſtas, ſive radix ponatur. Fac enim eſſe $a = b$, erit ſane etiam $a^2 = b^2$, & $a^3 = b^3$ &c., ſimiliterque $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, & $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$ &c. Quæ omnia manifeſta per ſe ſunt.

His rebus facile intelliges, quemvis æquationis terminum, ſi ei modo ſignum mutetur, ad partem alteram transferri poſſe ſalva æqualitate. Verbi gratia ſi habueris $ab + bc = bb$ poteris terminum ab transferre ad partem alteram hoc modo $bc = bb - ab$; etenim perinde erit, ut ſi quantitatem eamdem ab utrique parti ademiſſes.

Hinc porro duo conſecuntur. Primum ut, ſi terminorum omnium ſigna in æquatione mutentur, ta-

men maneat æqualitas; ideoque, ſi fuerit $ab - bc = cb - cc$, ſit etiam $-ab + bc = -cb + cc$. Id enim perinde eſt, ut ſi unumquemque terminum utriuſque partis in partem alteram tranſtuliſſes. Deinde, ut, ſalva æqualitate, poſſint termini omnino omnes in unam partem coniici, ut ex parte altera terminus nullus ſit reliquus præter zerum. Itaque ſi habeas verbi gratia $ab + bc = aa - bb$, æqualitatem ſervabis ponendo $ab + bc - aa + bb = o$. Et ſane, id faciens, partem alteram æquationis alteri detrahis, ac, cum æquales inter ſe ſint, quod reliquum eſt, æquale zero ſit, oportet.

De ſeparanda incognita & æquatione ad id præparanda.

Atque hæc quidem eo ſpectant, ut certa quædam litterula, ſi fieri poſſit, ex una tantum parte relinquatur, litteris aliis omnibus in partem aliam rejectis, ſalva æqualitate, eaque litterula poſitivo ſigno affecta ſit, nec niſi ad poteſtatem primam evecta.

Litterula, quæ hoc modo ab aliis ſecernenda eſt, dicitur incognita, ejuſque ſecretio ſeparatio incognitæ. Mos tenet, ut pro incognita ſumatur littera x, aut alia quævis ex iis, quæ in communi alphabeto poſtremæ numerantur. Poſthac igitur ubi x dixero, incognitam intelligi volo.

Sunt profecto æquationes quædam implexæ adeo im-

implicatæque, ut ſeparandæ incognitæ ſpem omnem adimant; ſunt aliæ, quæ, ſi modo præparentur, ſpem afferunt. Nam ſi x aut in fractione quapiam ſedeat, aut radicali cuipiam ſigno ſubiiciatur; antequam ſeparetur, oportebit æquationem uſque eo verſare dum littera x extra fractionem, & radicale quodvis ſignum ponatur. Atque hæc æquationis præparatio eſt, quæ erit perſæpe expeditiſſima, ut præceptione vix ulla indigeat.

Sit verbi gratia æquatio $\frac{xx}{a}+b=c$. Quis ſtatim non videt, ſi multiplicentur termini omnes per a, eam in hanc verti $xx+ab=ac$? Itemque ſi ſit æquatio $b+\frac{aa}{x}=b$, eam, multiplicando terminos omnes per x, verti in hanc $bx+aa=bx$? quo erit littera x e fractione educta, ſalva æqualitate.

Sæpe etiam nihil negotii erit litteram x radicali ſigno exſolvere. Sit verbi gratia æquatio $c+\sqrt{ax}=b$, promptum erit æquationem in hanc vertere $\sqrt{ax}=b-c$, ac tum utramque partem ad poteſtatem ſecundam evehere; ſic exſiſtet $ax=\overline{b-c}^{2}$, eritque x e radicali ſigno educta. Eademque ratione ſi fuerit $c+\sqrt[3]{a^2x}=b$; eam prius in hanc vertes $\sqrt[3]{a^2x}=b-c$; ac tum, utraque parte ad poteſtatem tertiam evecta, erit tibi $a^2x=\overline{b-c}^{3}$.

Quod ſi fuerint radicalia ſigna duo, ut in hac

quidem æquatione $c+\sqrt{ax}=b-\sqrt{bx}$, promptum erit ſigna ambo in unam partem coniicere, terminis aliis conjectis in partem alteram, æquationemque in hanc vertere $\sqrt{ax}+\sqrt{bx}=b-c$; ac tum, ſi utramque partem quadraveris, erit tibi $ax+bx+2\sqrt{abxx}=\overline{b-c}^2$; eaque re ſigna duo ad unum redegeris, quod ſignum ea, quam ſupra oſtendi, ratione expelli poterit. Quamquam brevius, & omnino melius rem expedies, ſi cum deveneris ad æquationem $\sqrt{ax}+\sqrt{bx}=b-c$, eamdem deſcripſeris ſic: $\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\sqrt{x}=b-c$. Hinc enim ſtatim ad hanc devenies $\sqrt{x}=\frac{b-c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, atque hinc ad hanc $x=\frac{\overline{b-c}^2}{a+b+2\sqrt{ab}}$. Has brevitates, uti alia hujus generis commoda, ſi qua occurrent, cognoſcere, diligentiæ erit, atque induſtriæ.

Quo modo, præparata æquatione, ſeparatio incognitæ tentanda ſit.

UBi incognita extra fractionem omnem, & radicale quodvis ſignum poſita fuerit, erit tum demum ſeparatio tentanda; cujus rei ratio eſt duplex. Etenim vel habet x in æquatione tota unam tantum poteſtatem, ſive primam, ſive ſecundam, ſive tertiam &c., vel alias in terminis aliis. Quæ duo quamvis dif-

differunt, communis tamen præceptio eſt, ut, ſi ſeparare litteram x velis, ante omnia termini illi omnes, quibus adeſt littera x, in unam partem transferantur, rejectis aliis in partem alteram.

Ea re facta, ſi habeat x unam tantum poteſtatem, ſive primam, ſive ſecundam, ſive tertiam &c., una erit, minimeque artificioſa ſeparandi ratio. Habeat x primam tantum poteſtatem, ut in hac æquatione $bx + cx = aa$. Promptum erit hanc ſic vertere $x = \frac{aa}{b+c}$; quo ſtatim x ſeparatam habes. Habeat x poteſtatem tantum ſecundam, ut in hac æquatione $axx - bxx = c^3$. Hanc quoque promptum erit ſic vertere $xx = \frac{c^3}{a-b}$; ac tum, ſi utriuſque partis radicem ſecundam poſueris, erit tibi $x = \sqrt{\frac{c^3}{a-b}}$. Haud abſimili ratione ſeparationem abſolves, ſi habuerit x poteſtatem tantum tertiam, ut in hac æquatione $ax^3 - bx^3 = c^4$, quam ſtatim ſic vertes $x^3 = \frac{c^4}{a-b}$; ac poſita utriuſque partis radice tertia, erit tibi $x = \sqrt[3]{\frac{c^4}{a-b}}$. Numquam non hoc modo procedet ſeparatio, quotieſcumque unam tantum poteſtatem habeat x, quamcumque habeat.

Iam habeat x poteſtates in aliis terminis alias; ac primum habeat tum primam, tum ſecundam, ut in hac æquatione $cxx + abx = ebb$. Hic vero ad

ſepa-

ſeparandam incognitam tria præſtanda ſunt.

Primum effice, ut quadratum $x\,x$ & poſitivum ſit, & per nullam quantitatem aliam multiplicatum. Quare, cum in exemplo, quod attuli, multiplicatum ſit per c, facies ne ſit, dividendo terminos omnino omnes per c; verteſque æquationem in hanc $x\,x + \frac{abx}{c} = \frac{ebb}{c}$. Quod ſi ſit $x\,x$ negativum, id facile mutabis, ſi ſigna mutaveris terminorum omnium.

Secundo illud, quidquid eſt, $\frac{ab}{c}$, per quod multiplicatur x, quodque idcirco afficiens litteræ x dicitur, ſepones, ac divides per 2, ſic $\frac{ab}{2c}$, ejuſque quadratum $\frac{a^2b^2}{4c^2}$ utrique æquationis parti adiunges; eritque iam æquatio converſa in hanc $x\,x + \frac{abx}{c} + \frac{a^2b^2}{4c^2} = \frac{a^2b^2}{4c^2} + \frac{ebb}{c}$.

Tertio demum, quoniam æquatione huc deducta, plane intelligis primam ejus partem idem eſſe ac quadratum ſummæ $x + \frac{ab}{2c}$, promptum erit utriuſque partis radicem ponere ſic $x + \frac{ab}{2c} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{4c^2} + \frac{ebb}{c}}$. Quo facto terminum $\frac{ab}{2c}$ in partem alteram transferes, ac continuo litteram x ſeparatam habebis ad hunc modum $x = \sqrt{\frac{a^2b^2}{4c^2} + \frac{ebb}{c}} - \frac{ab}{2c}$. Quod idem

dem commodius ſcribetur ſic $x = \frac{\sqrt{a^2e^2 + 4ceb^2} - ab}{2c}$.

Habet iam x poteſtates in aliis terminis alias, eaſque cum prima, tum ſecunda altiores; hic enimvero difficultates occurrunt longe maximæ, quas vincere præceptio adhuc nulla potuit. Itaque qui hæc tradunt, illos, ubi ad hunc locum venerint, breviores facit rei ignoratio.

De argumento quodam, quod ſeparatione incognitę continetur, & ejus vi.

Æquationem tunc veram eſſe ſcio, ſi partes duæ, quibus conſtat, vere æquales inter ſe ſint. Separatio autem incognitæ, quæ per æquationes plures fit, alias ex aliis nexas, argumentum quoddam continet, quo efficitur, ut ſi ſequens æquatio vera ſit, veram quoque eſſe oporteat, quæ præceſſerit, ideoque, ſi ultima, etiam primam. Idque adeo manifeſtum eſt, ut explicatione nulla indigeat. Exempli cauſa ſit æquatio $xx - aa = bb$. Separando incognitam, ad alteram æquationem venies $xx = aa + bb$; tum ad tertiam $x = \sqrt{aa + bb}$. Hic profecto ſi tertia æquatio vera ſit, ſecundam quoque veram eſſe oportet, ac ſi ſecunda, etiam primam; ergo etiam primam, ſi tertia. Et ſane ſi in æquatione prima quantitatem $\sqrt{aa + bb}$ pro x ſuppoſueris, erit æqualitas maniſeſtiſſima.

Hanc

Hanc ob cauſam quantitas illa, quæ ad ultimum æqualis incognitæ x invenitur, dicitur ejus valor. Sic in exemplo, quod attuli, quantitas $\sqrt{aa+bb}$ dicetur valor incognitæ x.

Hic vero unum animadvertas, oportet. Cum, ſeparando incognitam, ad radices ſecundi gradus delaberis, uti a ſecunda æquatione $xx=aa+bb$ cum tranſis ad tertiam $x=\sqrt{aa+bb}$; nihil refert, utrum parti alteri ſignum $+$ præponas, an ſignum $-$; namque utrovis modo poſueris $x=\sqrt{aa+bb}$, ſive $x=-\sqrt{aa+bb}$, illud nihilominus ſemper ſequetur, ut ſi æquatio tertia vera ſit, ſecundam quoque veram eſſe oporteat, ideoque etiam primam; neque argumenti vis, quod ſeparatione incognitæ contineri diximus, ulla ex parte minuetur.

Hoc ergo in ſeparanda incognita diligenter tene. Ubi ad radices devenies, utrumque ſignum parti alteri adiunges, ſcribeſque (ne ab exemplo recedam) $x=\pm\sqrt{aa+bb}$. Quo ſignificabis incognitam x duos habere valores $+\sqrt{aa+bb}$, & $-\sqrt{aa+bb}$, quorum ſi utervis in æquationem primam pro x transferatur, ipſam veram reddet.

Placet idipſum exemplo altero declarare. Sit æquatio $xx-2ax=cc-aa$. Hinc ſane, ut litteram x rite ſepares, ad æquationem alteram venies $xx-2ax+aa=cc$; tum radices pones utriuſque partis. Hic ergo utrumque ſignum parti alteri adiunges hoc modo: $x-a=\pm c$. Quo facto habebis tandem

dem $x = a \pm c$; eruntque incognitæ x valores duo $a + c$, & $a - c$.

De problematis per æquationes ſolvendis.

Atque his quidem iam ſatis paratum te eſſe arbitror, mi Ratta ſuaviſſime, ad problemata quamplurima diſſolvenda; quod ſtudium ut ineas, non te hortabor; ſcio enim, te hortatore non indigere; viam tantum monſtrabo; & pauca monebo, non quaſi docens, ſed quaſi currentem incitans.

Problemate propoſito ad tria ſtatim intendes animum. Primum, ut problema ipſum ad duarum quantitatum æqualitatem referas, quam æqualitatem ſi poſſis ponere, ſit tibi problematis ipſius ſolutio expeditiſſima.

Secundo, ut duas haſce quantitates denomines. Denominationes autem duces ab eis lineis, quas pertinere ad problema intelliges, earumque proprietatibus; quarum linearum quæ magnitudinis datæ erunt, conſtitutæque, eas appellabis a, b, c &c.; quæ data non erit, neque cujus magnitudinis ad ſolvendum problema eſſe debeat, cognoſcas (cum idipſum quærendum ſit) eam pro incognita habebis, & denominabis x.

Tertio. E quantitatibus duabus illis, in quarum æqualitate problematis ſolutio poſita eſt, ita, ut ſupra dixi, denominatis, æquationem tibi finges, & in-

cognitam x ſeparabis. Ac tum ſcilicet problema tibi ſolutum erit; quippe incognitæ x valor ſatis oſtendet, cujus magnitudinis ea eſſe debeat, ut quantitates duæ illæ æquales vere ſint; ideoque problematis ſolutio ſit tibi expeditiſſima.

Atque huc ſane illud maxime pertinet, ut incognitæ valor poſſit conſtrui. Conſtruetur autem ex his, quæ alibi docui, facillime, ſi nullas niſi ſecundi gradus radices contineat; ſin radicibus implicetur aliis, erit conſtructio paulo altius repetenda; de quo dicam ſuo loco. Hic tria tantum ſcias volo.

Primum. Si valor incognitæ x negativus prodeat, ut ſi prodeat $x = -a$; tunc linea x, quam diſcedere a certo puncto, & ad certam partem dirigi tibi finxeras, erit tibi ab eodem puncto ad contrariam partem dirigenda.

Secundo. Si x duos, pluresve valores habeat, verbi gratia ſi prodierit $x = \pm\sqrt{ab}$, & ſi horum quiſque æquationem, unde omnes prodeunt, veram reddat, interdum tamen non quiſque ei problemati ſatisfaciet, quod in animo ipſe habes. Plerumque enim accidet, ut æquatio, quam poſuiſti, non illud ſolum problema exprimat, quo animum intendiſti, ſed alia etiam illi affinia, quibus ſingulis certus incognitæ valor reſpondeat, oportet. Qui autem valor problemati illi ſatisfaciat, quod tibi ipſe propoſuiſti, haud difficile erit cognitu rem paulo diligentius attendenti.

Tertio. Si valor x ſit radix ſecunda quantitatis cujuſ-

juſpiam negativæ, verbi gratia ſi prodeat $x = \pm\sqrt{-ab}$; id ſigno erit, impoſſibile illud eſſe, quod quæritur; non quod valor æquationem illam, unde prodiit, ſi in locum x ſubſtituatur, non veram reddat, ſed quia eſt ipſe abſurdus natura ſua, atque impoſſibilis.

Adſentio ego quidem exemplis hæc omnia indigere. Paucula ergo afferam, quæ, ut mea opinio eſt, eo rem magis declarabunt, quo erunt faciliora, & breviora.

EXEMPLUM I.

Problema.

Datam rectam A B (*Fig.* 21) ita dividere in P, ut ſint A B, A P, P B continue proportionales.

Problema hoc ſtatim refero ad æqualitatem hanc $\overline{AP}^2 = AB \cdot PB$, hac enim poſita erunt certe A B, A P, P B continue proportionales.

Sit iam data $AB = a$; incognita $AP = x$. Erit ſane $PB = a - x$, & $\overline{AP}^2 = xx$, & $AB \cdot PB = aa - ax$.

Pono igitur æquationem $xx = aa - ax$, unde, incognitam x ſeparando, prodit $x = \pm \frac{\sqrt{5aa} - a}{2}$.

Habet hic ergo x valores duos $\frac{\sqrt{5aa} - a}{2}$, &

Digitized by Google

$-\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$. Ac primum quidem valorem $\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$ facile conſtat poſitivum eſſe; quipe quantitas $\sqrt{5aa}$, quæ ponitur, major eſt, quam a, quæ negatur. Neque minus facile intelligitur eſſe $\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$ minorem, quam a, ideſt A B. Omnino conſtat, ſi ſumatur $AP = \frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$, per hunc valorem plane ſatisfactum iri problemati, quod propoſuimus.

Valor alter $-\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$, dubium non eſt, quin negativus ſit, ſitque ad partem contrariam dirigendus ſumendo $AQ = \frac{\sqrt{5aa}+a}{2}$, quod ubi feceris, habebis Q B, Q A, A B continue proportionales, quod ſane valde affine eſt rei illi, quæ quærebatur.

EXEMPLUM II.

Problema.

In dato circulo A M B Q, (*Fig.* 22.) cujus diameter A B, centrum C, inſcribere triangulum æquilaterum A M Q.

Problema hoc ad æqualitatem ſic refero. Non

eſt

eſt dubium, quin, ſi inveniatur in diametro punctum P tale, ut ducta perpendiculari P M, quæ ſecet circulum in M, ductaque A M, ſit $AM = 2PM$, non eſt, inquam, dubium, quin ſit trianguli æquilateri inſcriptio expeditiſſima. Siquidem producta M P donec ſecet circulum in Q, ductaque A Q, facile conſtat æqualia eſſe latera omnia A M, M Q, A Q.

Sit iam C B, ſive $CA = a$; $CP = x$. Erit $AP = a + x$; $PB = a - x$; P M (media proportionalis inter A P, & P B) $= \sqrt{aa - xx}$, ideoque $2PM = 2\sqrt{aa - xx}$. Erit autem A M (hypotenuſa in triangulo A P M) $= \sqrt{2aa + 2ax}$.

Pono ergo æquationem $\sqrt{2aa + 2ax} = 2\sqrt{aa - xx}$. Utramque partem quadro, tum ſeparo incognitam x, ac prodit $x = \pm \frac{3a - a}{4}$.

Hic igitur habet x valores duos $\frac{3a - a}{4} = \frac{a}{2}$, & $- \frac{3a - a}{4} = -a$. Non eſt dubium, quin primus valor $\frac{a}{2}$ problemati ſatisfaciat, ſitque futurum triangulum A M Q æquilaterum, ſi ſumſeris C P æqualem dimidio radio, ideſt $\frac{a}{2}$.

Valor alter $-a$ e contraria parte ſumendus erit, eritque æqualis radio, ideſt a, ideoque punctum P cadet in A. Quod ſi rem ſpectes, hic quoque valor problemati ſatisfaciet. Cadente enim P in A, erit P M zerum; totumque triangulum A M Q,

&

& ſingula ejus latera zerum erunt, ideoque omnia æqualia. At enim de hujuſmodi triangulo quis quærat? Nemo quiſquam. Valor tamen a veritate minime aberrat.

EXEMPLUM III.

Problema.

DAtam lineam A B ita dividere in Q, [*Fig.* 23.] ut rectangulum ex A Q & Q B æquale ſit quadrato lineæ A B.

Hinc ſine ullo artificio ipſa ſe prodit æqualitas. Sit ergo $AB = a$; $AQ = x$. Erit $QB = a - x$. Ideoque rectangulum ex A Q & Q B erit $= ax - xx$. Pono igitur æquationem $ax - xx = aa$. Separando incognitam x, prodit $x = \frac{a \pm \sqrt{-3aa}}{2}$.

Habet igitur x valores duos $\frac{a + \sqrt{-3aa}}{2}$, & $\frac{a - \sqrt{-3aa}}{2}$, utrumque, ex abſurda radice illa $\sqrt{-3aa}$, impoſſibilem. Quo patet impoſſibile id eſſe, quod quæritur.

De diviſionibus æquationum, & problematum variis.

HIc vero de nominibus magis, quam de rebus agetur, ut fere fit, cum res in partes dividuntur. Æquatio quævis ejus gradus eſſe dicitur, quem maximum habet poteſtas incognitæ. Quare ſi in æquatione non niſi primam poteſtatem habet incognita, ut in hac $bx + cc = cx$, æquatio dicitur primi gradus, vel etiam linearis.

Si incognita in æquatione ſecundam habet poteſtatem, ut in hac $xx - ac = bb$, æquatio dicitur ſecundi gradus, vel etiam quadratica. Quod ſi & ſecundam poteſtatem habeat incognita, & etiam primam, ut in hac æquatione $xx + aa = bb - bx$, æquatio dicetur quadratico affecta.

Si habuerit incognita poteſtatem tertiam, ut in hac æquatione $x^3 + ax^2 = c^3$, dicetur æquatio tertii gradus, vel etiam cubica. Quod ſi incognita habuerit poteſtatem quartam, dicetur æquatio quarti gradus; ſi quintam, quinti &c.

Problema quodvis ejus gradus eſſe dicitur, cujus gradus eſt æquatio illa, per quam ſolvitur. Dicuntur etiam problemata, alia determinata, alia indeterminata, quæ partitio eſt explicanda.

Si in æquatione, per quam problema ſolvitur, præter incognitam x, litteræ aliæ omnes a, b, c &c. quantitates exprimant certæ conſtitutæque magnitudinis, quam variare nullo modo liceat, problema de-

determinatum dicitur. Hujus generis illa ſunt, quæ paulo ante in exemplum attuli.

Quod ſi in æquatione, præter x, alia quæpiam ſit littera, puta y, quæ qua ſit magnitudine, ad ſolvendum quidem problema, nihil referat; problema dicitur indeterminatum. Rem diligentius declaremus.

Datis rectis A B, B C (*Fig.* 24.) datum angulum A B C efficientibus, quæratur punctum M, a quo ſi ducatur recta M P parallela ad C B, ſecanſque A B in P, ſit A P, P M :: A B, B C. Erit hoc problema indeterminatum.

Fac enim A B $= a$, B C $= b$, A P $= x$, P M $= y$. Problemati ſatisfactum plane erit, ſi modo fuerit $bx = ay$. Ut ſit autem $bx = ay$, nihil refert, qua ſit magnitudine aut x, aut y, modo altera ſic ſe habeat ad alteram, ut vera ſit æquatio $bx = ay$, id quod obtineri poterit variando vel x, vel y infinitis modis.

Sume enim x tamquam incognitam, eamque ſepara. Erit tibi $x = \frac{ay}{b}$. Hic cujuſque magnitudinis ponatur y, modo fiat $x = \frac{ay}{b}$, erit utique $bx = ay$. Rurſum ſume y tamquam incognitam, eamque ſepara. Erit tibi $y = \frac{bx}{a}$. Atque hic etiam cujuſcumque magnitudinis ponatur x, modo fiat $y = \frac{bx}{a}$, erit utique $bx = ay$. Sic variari infinitis modis poterunt tum

tum x tum y, & infinita puncta M inveniri, quæ problemati ſatisfacient.

Quantitates, quæ infinitis modis variari poterunt, dicuntur variabiles, eæque ultimis alphabeti litteris x, y, z ſolent exprimi. Quantitates aliæ dicuntur conſtantes.

Infinita illa puncta M, quæ problemati ſatisfaciunt, lineam oſtendunt, quæ locus dicitur. Æquatio autem unde illa prodierunt, æquatio dicitur ejus loci, ſive ad eum locum.

Linea x, quæ ſcilicet a certo puncto A ducitur, abſciſſa dicitur; y vero ordinata; ea vero, in qua x ſumitur, axis dici ſolet.

Non eſt dubium quin linea recta A C (ut in propoſito exemplo maneam) in infinitum producta locus ille ſit, ad quem eſt æquatio $bx = ay$. Quod per raro accidit, ut locus ſit linea recta; plerumque enim eſt curva quæpiam linea, pro æquationis varietate, varia; ac licet curvæ infinitæ prodire poſſint, eæque inter ſe diverſiſſimæ, perſæpe tamen in eas incides, quæ ſunt geometris familiariſſimæ, notiſſimæque; cujus rei exemplum unum afferam.

EXEMPLUM.

Problema.

DAta recta A B (*Fig.*25.) invenire extra ipſam punctum M, a quo ſi ducatur M P perpendicularis ad A B, ſit $\overline{PM}^2 = AP.PB$.

Sit data $AB = a$; $AP = x$. Erit $PB = a - x$, & $AP \cdot PB = ax - xx$. Sit $PM = y$; quare $\overline{PM}^2 = yy$. In problemate, uti quidem propoſitum eſt, nihil aliud quæritur, niſi ut vera ſit æquatio $yy = ax - xx$, quæ ſi vera fuerit, nihil refert, qua magnitudine ſit aut x, aut y. Problema eſt igitur indeterminatum, infinitaſque habet ſolutiones.

Fac enim ſepares y. Erit tibi $y = \pm\sqrt{ax - xx}$; ubi quantumcumque varies lineam x, dummodo ſemper ponas $y = \pm\sqrt{ax - xx}$, vera erit æquatio $yy = ax - xx$.

Vel etiam fac ſepares x. Erit tibi $x = \frac{a \pm \sqrt{aa - 4yy}}{2}$, ubi quantamcumque poſueris y, dummodo ſemper ponas $x = \frac{a \pm \sqrt{aa - 4yy}}{2}$, numquam non vera erit æquatio $yy = ax - xx$.

Erunt ergo infinita puncta M, quæ problemati ſatisfacient; ac ſi locum diligentius inſpexeris, facile invenies, eum eſſe curvam lineam, notiſſimam, nobiliſſimamque inter omnes, cui circulo nomen eſt.

Atque hæc de æquationibus dixiſſe in præſens ſatis ſit, quæ cum perceperis, quod tibi, mi Ratta perfacile erit, tum ad ea, quæ penitiora ſunt, æquationumque naturam atque uſum maxime illuſtrant, accedemus.

DE

DE VARIIS ÆQUATIONUM PROPRIETATIBUS.

Definitiones & poſtulata quædam,

Nunc varias æquationum proprietates exſequar. Sed ante omnia æquationem ipſam ita præparari volo, ut hæc habeat.

I. Primum termini omnes in unam partem conjecti ſint. Incognita x nullo radicali ſigno adſtricta. Quantitates reliquæ a, b, c &c. reales ſint; quales utique ſemper erunt. Quis enim imaginarias conſulto invehat?

II. Primo loco terminus ille ſit poſitus; in quo x maximam habet poteſtatem; iſque poſitivo ſigno affectus, coefficiente nullo præterquam 1. Primum hunc terminum ſequantur alii eo ordine, quo incognitæ poteſtas minuitur, donec ad eum veniatur, in quo x apparet nulla. Exemplo ſit $x^3+a\,x^2+b^2\,x+q=o$. Hic eſt x^3 primus terminus; $a\,x^2$ ſecundus; $b^2\,x$ tertius; q vero, ubi nulla apparet x, dicitur terminus ultimus.

Quo loco duo præcipienda ſunt. Primum. Siqua in æquatione plures ſint termini, in quibus x ad eamdem poteſtatem evecta ſit, ſummam omnium pro uno termino habebis. Occurrat æquatio $x^3+a\,x^2+b^2\,x+c\,x^2+q=o$; terminos $a\,x^2$, & $c\,x^2$ pro uno habebis, æquationemque ſic ſcribes commodiſſime $x^3+a\,x^2+b^2\,x+q=o$. Deinde. Si æquatio oc-
$+c\,x^2$

currat, in qua terminus quiſpiam deſideretur, hunc adeſſe putabis multiplicatum per zerum. Occurrat æquatio $x^3 + b^2 x + q = o$, in qua terminus ſecundus deſideratur; hunc ergo putabis adeſſe, neque incommode ſcribes $x^3 + o x x + b^2 x + q = o$.

III. Quantitas quævis cognita, quocumque in termino per incognitam multiplicetur, dicitur coefficiens illius termini.

IV. Æquatio quæque dicitur eſſe ejus gradus, cujus gradus eſt poteſtas maxima incognitæ. Erit ergo $x - b = o$ æquatio primi gradus; $x x + u = o$ ſecundi; $x^3 + a x + p = o$ tertii &c. Quamquam æquatio primi gradus dicitur etiam linearis; ſecundi quadratica, ac ſi adſit ſecundus terminus, etiam quadratica affecta; tertii, etiam cubica.

V. Valor incognitæ x eſt quantitas illa cognita, quæ ſi in æquatione pro x ſubſtituatur, ſumma terminorum omnium evadit zerum. Sic in æquatione $x x + 2 a x + a a = o$, ſi pro x ſubſtituas $- a$, ſummæ terminornm omnium evadet zerum. Erit ergo $- a$ in hac æquatione valor incognitæ x, diceturque verificare æquationem. Sunt qui valores incognitæ radices æquationis vocent; quam apte nihil opus eſt quærere.

VI. Binomium vocabo incognitam ſimplicem, cui quæpiam cognita adiuncta ſit, uti $x + a$, $x - b$. Si æquatio uno binomio conſtet, puta $x + a = o$, ſatis patet, valorem incognitæ x non alium eſſe poſſe, niſi cognitam illam a mutato ſigno, ideſt $- a$;

nam

nam $-a+a$ vere æquat zerum; neque vero alia quantitas, præter $-a$, præſtare id poteſt. Sic etiam in æquatione $x-b=o$ non alius valor eſſe poteſt incognitæ x, niſi $+b$.

VII. Si duæ pluresve æquationes, quarum unaquæque binomio uno conſtet, puta $x-a=o$, $x-b=o$, ſimul multiplicentur, unde exiſtat æquatio una, puta $xx \begin{matrix} -ax \\ -bx \end{matrix} +ab=o$; hanc æquationem productam appellabo; illas producentes. Adhuc definitiones, & poſtulata quædam expoſui. Quæ ſecuntur propoſitionibus paucis complectar.

Prop. I.

In æquatione producta habet x valores eos, quos habet in producentibus; neque ullos alios habere poteſt. Nam primum. Sint ex. gr. producentes duæ $x-a=o$, $x-b=o$. Si hic pro x ſubſtituatur vel a, vel b, alterum binomiorum evadet zerum; ergo in æquatione producta habebit x valores duos a, & b, quos nempe habet in producentibus. Deinde. Quidquid ponatur pro x in producentibus præter a & b, binomia ambo $x-a$, $x-b$, aliquid ſemper erunt; neutrum abibit in zerum; ergo ne ipſorum quidem productum; ergo ne æquatio quidem producta. Ergo in æquatione producta nullum valorem habere poteſt x niſi a, & b. Eadem valebit ratio, quotquot ſint producentes. *Prop.*

Digitized by Google

Prop. II.

UT æquatio producta nullum præ ſe ferat imaginarium, ut ſupra poſtulavimus, oportet, ut ſi altera producens habet imaginarium quodpiam, uti $x+\sqrt{-c}$; producens altera habeat idem imaginarium cum ſigno oppoſito, uti $x-\sqrt{-c}$. Nam ſi ita eſt, multiplicando binomia, imaginarium evaneſcet, nullumque imaginarium præſeferet æquatio producta, quemadmodum ſupra poſtulavimus; ſin minus, perſiſtet imaginarium, ac ſe oſtendet in æquatione producta, contra quam poſtulavimus.

Coroll.

HInc illud ſatis patet. Si in æquatione producta valor quipiam incognitæ x ſit imaginarius, erit etiam alter valor; neque eſſe poterunt valores imaginarii, niſi numero pares.

Prop. III.

SI æquationes producentes duæ ſint, poteſtas maxima incognitæ x erit duorum graduum; ſi tres, trium; & ſic deinceps. Id ipſa multiplicationis ratio facile oſtendet. Exempla duo afferam.

Exemplum primum. Sint producentes duæ $x-a=o$,

$x=$

$x - b = o$, erit producta $\begin{array}{l} xx - ax + ab = o \\ \quad\;\; - bx \end{array}$. Po-
teſtas maxima incognitæ eſt duorum graduum.

Exemplum alterum. Sint producentes tres $x - a = o$, $x - b = o$, $x - c = o$. Erit producta

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx - abc = o. \\ \quad\; - bx^2 + acx \\ \quad\; - cx^2 + bcx \end{array}$$

Poteſtas maxima incognitæ trium eſt graduum.

Prop. I V.

In æquatione producta tot valores habet x, quot ſunt gradus, ad quos poteſtas ejus maxima evecta eſt: nam tot certe habet valores, quot habet in æquationibus producentibus; qui valores tot ſane ſunt, quot producentes ipſæ: atqui quot ſunt producentes, tot etiam ſunt gradus, ad quos evehitur poteſtas maxima incognitæ x in æquatione producta; ergo in æquatione producta tot valores habet x; quot ſunt gradus, ad quos poteſtas ejus maxima evecta eſt.

Prop. V.

In æquatione producta coefficiens ſecundi termini eſt ſumma valorum omnium, ſignis mutatis. Id ipſe multiplicationis ordo oſtendit. Vide exemplum pri-

mum,

mum, quod ſupra attuli. Valores ſunt $+a$, $+b$. Coefficiens ſecundi termini eſt $-a-b$. Vide exemplum alterum. Valores ſunt $+a$, $+b$, $+c$. Coefficiens ſecundi termini eſt $-a-b-c$.

Prop. V I,

IN æquatione producta coefficiens tertii termini continet ſummam productorum, quæ fiunt e binis quibuſque valoribus, ſi ſinguli in ſe multiplicentur. Id etiam ipſa multiplicationis ratio manifeſtum faciet, ſi attentius inſpiciatur. Refer te ad exemplum alterum, quod ſupra attuli. Cum valores ſint tres a, b, c, etiam bini ſint tres oportet, a & b, a & c, b & c. Si binos ſingulos in ſe multiplices, erunt producta ab, ac, bc. Et vero coefficiens tertii termini habet $ab+ac+bc$.

Neque minus ordo ipſe multiplicationis oſtendet, ſi quartus adſit terminus, ejus coefficientem continere producta ternorum; ſi quintus, quaternorum, &c.

Prop. V I I.

IN æquatione producta ultimus terminus numquam non continet productum valorum omnium. Id facile oſtendit multiplicationis ratio. Refer te ad exempla, quæ ſupra attuli. In primo valores ſunt a & b; ultimus terminus eſt ab. In altero valores ſunt a, b, c; ultimus terminus eſt abc. *Prop.*

Prop. VIII.

Sit propoſita æquatio quævis ſecundi gradus, puta $xx+ax+b=o$. Finge tibi duas quantitates δ, & θ, qualeſcumque eæ ſint, quarum ſumma æquet a coefficientem ſecundi termini; productum vero æquet b ultimum terminum. Dico, æquationem propoſitam eſſe productam ex duabus $x-\delta=o$, $x-\theta=o$. Etenim ſi hæ duæ per ſe mutuo multiplicentur, producetur ſane æquatio, quæ erit plane eadem, atque æquatio propoſita $xx+ax+b=o$.

Haud abſimili ratione oſtendes, æquationem quamlibet propoſitam tertii gradus, puta $x^3+ax^2+bx+c=o$ productam eſſe ex tribus $x-\delta=o$, $x-\theta=o$, $x-\omega=o$, ſi quantitates δ, θ, ω tibi fingas, ut oportet.

Pari modo procedes ad æquationes alias quaslibet cujuſvis gradus.

Scholion.

Cum æquatio, quam in exemplum ſupra adhibui, $xx+ax+b=o$ ſit plane eadem, atque illa, quæ producitur ex duabus $x-\delta=o$, $x-\theta=o$; in hac autem non poſſit x habere valores alios niſi δ, & θ; ſic etiam in illa habebit x valores duos, qui nulli alii eſſe poterunt, niſi quos finximus, δ, & θ.

Atque id pari ratione transferes ad æquationes

alias omnes, quæcumque proponantur, cujuſvis gradus ſint.

Hiſque facile intelliges, ea, quæ adhuc diximus de æquatione producta, & de producentibus, in æquationes convenire omnino omnes.

Probl. I.

Propoſitam æquationem quamlibet, in qua x habeat valores quoslibet P, Q, R &c., in aliam convertere, in qua x habeat eoſdem valores P, Q, R &c., eoſque ſive multiplicatos per quantitatem datam c, ſive diviſos; ſive auctos quantitate data c, ſive imminutos. Id in uno exemplo feciſſe ſatis erit.

Sit ergo propoſita æquatio $xx + ax + b = o$, in qua habeat x valores P & Q. Pars prima. Pro x ſupple $\frac{x}{c}$. Æquatio in hanc transformabitur $\frac{xx}{cc} + \frac{ax}{c} + b = o$, in qua $\frac{x}{c}$ (ſi pro incognita habeatur) eoſdem habebit valores P, Q, quos habet in æquatione propoſita x. Erit ergo in æquatione transformata $\frac{x}{c} = \text{P}$, & $\frac{x}{c} = \text{Q}$; ergo erit $x = c\text{P}$, & $x = c\text{Q}$. Ergo habebit x valores P, Q multiplicatos per c.

Pars ſecunda. Pro x ſupple cx. Æquatio in hanc transformabitur $c^2x^2 + acx + b = o$, in qua cx habebit certe valores P, Q; eritque $cx = \text{P}$, & $cx = \text{Q}$;

ergo

ergo erit $x = \frac{P}{c}$, & $x = \frac{Q}{c}$. Habebit ergo x valores P, Q diviſos per c.

Pars tertia. Pro x ſupple $x - c$. Æquationem tibi facies, in qua erit $x - c = P$, nec non $x - c = Q$, ideoque $x = P + c$, & $x = Q + c$. Habebit ergo x valores P, Q auctos quantitate data c.

Pars quarta. Pro x ſupple $x + c$. Æquationem tibi facies, in qua erit $x + c = P$, nec non $x + c = Q$, ideoque $x = P - c$, & $x = Q - c$. Habebit ergo x valores P, Q imminutos quantitate data c.

Scholion.

SI intellexeris, quos valores habeat x in æquatione transformata, nihil negotii erit cognoſcere, quos habeat valores in æquatione propoſita.

Probl. II.

PRopoſita æquatione quavis, cui ſit ſecundus terminus, hanc in aliam vertere, quæ ſecundo termino careat; eaque ſit, ut in ipſa habeat x valores eoſdem, quos habet in æquatione propoſita, vel auctos quantitate quapiam data, vel imminutos. Id uno exemplo planum fiet.

Sit æquatio $xx + ax + b = 0$. Sume coefficientem a ſecundi termini, eique ſignum muta, tum di-

vide per 2, nempe per eum numerum, qui gradum æquationis oſtendit, ut jam habeas $-\frac{a}{2}$. Jam ergo in propoſita æquatione, pro x ſubſtitue $x - \frac{a}{2}$; habebiſque æquationem, quæ carebit ſecundo termino. Idque debere neceſſario fieri facile intelliges, ſi ſubſtitutionis ordinem attentius inſpexeris. Ubi vero ſecundum terminum hoc modo eliminaveris, habebit x in æquatione, quæ prodierit, valores eoſdem, quos habet in æquatione propoſita, auctos quantitate $\frac{a}{2}$.

DE

Digitized by Google

DE ÆQUATIONIBUS
RESOLVENDIS.

PRius quam ad rem venio, intelligas volo, quomodo tentari diviſio poſſit in quantitatibus compoſitis; quod enim in prima algorithmi parte præcepi, ut diviſorem dividendo ſubſcriberes interiecta lineola, id habet ſignificationem diviſionis quamdam, non diviſionem ipſam, quam tentare interdum convenit, ſi forte poſſit peragi. De hoc ergo dicamus.

De diviſione in quantitatibus compoſitis.

UNo exemplo rem abſolvam. Sit diviſor, $aa + bc$

dividendum

$$a^4 + ab^2c + a^2bc + a^3b - a^2bx - b^2cx$$

Sume e dividendo terminum a^4, in quo ſcilicet littera a maximam habet poteſtatem. Tunc ſume e diviſore terminum aa, in quo ſcilicet littera eadem a poteſtatem habet maximam. Illum per hunc divide. Quotum invenies aa. Hunc quotum multiplica per diviſorem, ac terminos, qui hinc fient, ſubtrahe dividendo. Ea re facta, dividendum reliquum erit $abbc + a^3b - a^2bx - b^2cx$. Hoc reliquum tracta eodem modo.

Sume

$\frac{a^4}{a\,a}$	$a\,a$
$\frac{a^3 b}{a\,a}$	$a\,b$
$\frac{-a^2 b x}{a\,a}$	$-b x$

Sume $a^3 b$; hunc divide per $a\,a$. Quotum invenies $a\,b$. Hunc quotum multiplica per diviſorem $a\,a + b\,c$, ac terminos, qui hinc fient, ſubtrahe dividendo. Ea re facta, dividendum reliquum iam erit $-a\,a\,b\,x - b\,b\,c\,x$. Rurſus hoc reliquum eodem modo tracta.

Sume $-a\,a\,b\,x$; hunc divide per $a\,a$. Quotum invenies $-b\,x$. Hunc quotum multiplica per diviſorem $a\,a + b\,c$, ac terminos, qui hinc fient, ſubtrahe dividendo. Ea re facta, cum dividendi nihil ſit reliquum, diviſio abſoluta erit, eritque inventorum quotorum ſumma $a\,a + a\,b - b\,x$ quotus ille; qui quærebatur. Et ſane ſi hæc ſumma per diviſorem $a\,a + b\,c$ multiplicetur, reſtituet dividendum.

Perſæpe eo devenies, ut quod reliquum dividendi erit, dividi ulterius non poſſit; ut ſi dividendo, quod ſupra propoſui, adjunctus fuiſſet terminus $t\,t\,c\,c$; nam facta diviſione ut ſupra, reliquum tandem eſſet $t\,t\,c\,c$, quod dividi per diviſorem $a\,a + b\,c$ non poteſt.

Id ſi accidat, ad ſummam quotorum inventorum fractionem addes hoc modo; $a\,a + a\,b - b\,x + \frac{t\,t\,c\,c}{a\,a + b\,c}$; eritque hic quotus abſolutus. Quod ſi quotus obtinebitur ſine fractione ulla, diviſio perfecta dicetur; imperfecta, ſi fractionem habuerit. Sed iam de his ſatis multa.

Digitized by Google

De reſolutione æquationum generatim.

REſolvi æquationem dico, cum valores incognitæ ex ipſa educuntur. Quemadmodum id fiat in æquationibus vel primi vel ſecundi gradus, credo me tibi alias expoſuiſſe. Nunc pauca monebo, primum de æquationibus generatim, tum præcipue de æquationibus tertii gradus, ac de caſu illo, quem irreducibilem vocant. Sed iam de reſolvendis æquationibus generatim dicamus.

Primum. Si incognita x eamdem ubique poteſtatem habeat; ut ſi proponatur æquatio $a x^5 + b b c^3 - t x^5 = 0$, nihil erit expeditius, quam æquationem reſolvere. Ubi enim feceris $a x^5 - t x^5 = - b b c^3$, tum $x^5 = - \frac{b b c^3}{a - t}$, pones radicem quintam utriuſque partis ſic $x = \sqrt[5]{\frac{- b b c^3}{a - t}}$, eritque hic valor incognitæ x. Hoc exemplo uti poteris ad caſus omnes.

Secundo. Si incognita non niſi duas poteſtates habeat, alteram alterius duplam, ut ſi proponatur $x^4 - a b = a x^2 + q$, æquationem tractabis, tamquam eſſet quadratica affecta, eritque perſæpe reſolutio paratiſſima. Ne ab exemplo diſcedam. Pone, uti fit in quadraticis $x^4 - a x^2 = a b + q$, & parti utrique adde $\frac{a a}{4}$ ſic $x^4 - a x^2 + \frac{a a}{4} = \frac{a a}{4} + a b + q$. Quoniam pars prima eſt procul dubio quadratum, cujus ra-

Digitized by Google

radix eſt $xx - \frac{a}{2}$, pones utriuſque partis radicem: ſic $xx - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + ab + q}$; tum $xx = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + ab + q}$; ac iam reſolutio in promptu erit. Pones nimirum $x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + ab + q}}$; qui erit valor incognitæ x.

Tertio. Si ſenſeris, æquationem reſolvendam produci ex duabus per ſe invicem multiplicatis, erit interdum reſolutio expeditiſſima. Res exemplo declaranda. Propoſita ſit æquatio $abxx - ac + bx^3 - cx = o$. Forte ſentis, eam productam eſſe ex his duabus $a + x = o$, & $bxx - c = o$. Harum igitur utramque reſolve. E prima habebis $x = -a$; ex altera $x = \pm \sqrt{\frac{c}{b}}$; eruntque hi valores incognitæ x in æquatione propoſita. Nam quivis horum valorum ſubſtituatur pro x, evadet zerum vel $a + x$, vel $bxx - c$; quare cum æquatio propoſita ex his duabus per ſe invicem multiplicatis producta ſit, ipſa quoque evadet zerum.

Scholion.

Nunquam non juvabit cognoſcere, an æquatio reſolvenda producatur ex aliis, quæque hæ ſint, id, quod diviſio manifeſtabit. Sic enim æquatio in æqua-

quationes plures diſcerpi poterit, eritque in ſingulis poteſtas incognitæ x depreſſior; eoque erit reſolvendi ſpes major.

De reſolutione æquationum tertii gradus.

Reſolvendæ æquationis tertii gradus, ſi adſit ſecundus terminus, ſpes eſt vix ulla. Igitur, ſi adſit, ante omnia eliminandus eſt, quod quemadmodum fiat, ſupra docui; ac tum ſpes erit aliqua in mirabili Cardani methodo, quam curſim attingam.

Propoſita ſit æquatio $x^3 - px - q = o$. Sunt p & q duæ quævis datæ. Pro x ſupple ſummam duarum incognitarum $y + z$. Vertetur æquatio in hanc $y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 - py - pz - q = o$, in qua ſane ſumma $y + z$ (ſi pro incognita accipiatur) eoſdem habebit valores, quos habet x in æquatione propoſita.

Hinc ſume terminos quatuor $3zyy + 3zzy - py - pz$. (*In additis vide Notam I.*) Fac hos æquales zero; elicies $y = \frac{p}{3z}$. Quare ſi ponatur $\frac{p}{3z}$ pro y, quatuor illi termini evadent zerum.

Sume tres reliquos terminos $y^3 + z^3 - q$. Fac hos pariter æquales zero. Elicies nempe $y = \sqrt[3]{q - z^3}$. Quare ſi ponatur $\sqrt[3]{q - z^3}$ pro y; termini illi tres evadent zerum.

Iam ergo ſi ponantur æquales $\frac{p}{3z}$, & $\sqrt[3]{q - z^3}$,

cum quatuor illi termini, tum hi tres ſimul omnes evadent zerum.

Pone igitur $\frac{p}{3z} = \sqrt[3]{q - z^3}$. (*Vide Notam II.*)

Hinc elicies $z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$. Quare ſi ubique hoc ponas pro z, hæc ſequentur. Primum valor incognitæ y, qui erat $\sqrt[3]{q - z^3}$, evadet

$$\sqrt[3]{q - \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}, \text{ ſive } \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

(Ubi illud animadvertas velim: quoniam in formando valore $\sqrt[3]{q - z^3}$ negari debet z^3, idcirco ſi in valore z^3 ponas $+\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, in formando valore $\sqrt[3]{q - z^3}$ ponendum erit $-\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, & contra). Deinde valores duo incognitæ y, ideſt $\frac{p}{3z}$, & $\sqrt[3]{q - z^3}$ fient æquales, omneſque omnino termini æquationis $y^3 + 3zyy$ &c. evadent zerum. Quare valor ſummæ $y + z$ in hac æquatione erit

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Erit ergo etiam in æquatione propoſita

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Eoque iam æquationem propoſitam reſolutam habes.

Sca-

Scholion.

Suſpectam diu fecit Cardani methodum hæc ratio. Si fuerit $\frac{p^3}{27}$ majus, quam $\frac{qq}{4}$, erunt ſane ambæ illæ radices cubicæ imaginariæ; ergo, ajebant, & illarum ſumma, ideſt valor incognitæ x erit imaginarius. In hoc autem fallaciæ quidpiam ineſſe ſic oſtendebant. Pone æquationem $x^3 - 7x - 6 = o$. Hic cum ſit $p = 7$, & $q = 6$, erit ſane $\frac{p^3}{27}$, ideſt $\frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{27}$ majus quam $\frac{qq}{4}$, ideſt $\frac{6 \cdot 6}{4}$: ideoque incognitæ x valor per Cardani methodum erutus erit imaginarius. Atqui tamen in hac æquatione non habet x niſi valores tres $-1, -2, +3$, qui reales ſunt omnes. Innumerabilia hujuſmodi exempla afferri poſſunt.

Verum hæc ratio nullius momenti eſt. Fieri enim poteſt, ut duæ quantitates imaginariæ ambæ ſint, illarum autem ſumma realis. Imaginariæ ſunt ambæ $a + \sqrt{-c}$, & $b - \sqrt{-c}$, illarum ſumma realis eſt, elidentibus ſe mutuo imaginariis. Quamvis ergo radices duæ illæ cubicæ imaginariæ ſint, non recte colligitur, etiam illarum ſummam, ideſt valorem incognitæ x, eſſe imaginariam. Fortaſſe ſi radices illæ duæ re ipſa poſſent extrahi, extractæque in ſummam redigi, inveniretur hæc ſumma realis, imaginariis ſe invicem elidentibus. Idque ita eſſe demonſtrat Nico-

Digitized by Google

lius in Pariſienſis Academiæ Actis, radices ambas in infinitas ſeries convertens. Ego idem oſtendiſſe mihi videor in Academiæ noſtræ actis vel ſine ſeriebus.

Quoniam valor incognitæ x, e Cardani methodo expreſſus, ſi imaginariis implicitus ſit, numquam eo reduci potuit, ut imaginariis exſolveretur omnibus, idcirco caſus ille irreducibilis dictus eſt.

Scholion alterum.

Quo apertior Cardani methodus fiat, certiorque, juvat eam traducere ad æquationem quadraticam ſimpliciſſimam. Sit æquatio $xx - p - q = 0$. Sunt p & q duæ datæ quævis; valoreſque incognitæ x duo ſunt $+\sqrt{p+q}$, & $-\sqrt{p+q}$, reales ambo.

Eruatur iam valor incognitæ x Cardani more. Pro x ſupple $y+z$. Vertetur æquatio in hanc $yy + 2zy + zz - p - q = 0$. Pone $2zy - p = 0$. Elicies $y = \frac{p}{2z}$. Pone $yy + zz - q = 0$. Elicies $y = \pm\sqrt{q - zz}$.

Pone iam $\frac{p}{2z} = \sqrt{q - zz}$. Elicies

$z = \pm\sqrt{\frac{q \pm \sqrt{qq - pp}}{2}}$. Ac ſi in valore incognitæ y, ideſt $\sqrt{q - zz}$ pones valorem hunc incognitæ

z,

z, habebis $y = \pm \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{qq - pp}}{2}}$, eritque $y + z$, ideoque x in propoſita æquatione ſic $y + z = x = \pm \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{qq - pp}}{2}} \pm \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{qq - pp}}{2}}$.

Neque ſane dubitari poteſt, quin ſit in æquatione, $xx - p - q = o$ valor incognitæ x is, qui inventus modo eſt; nempe $\sqrt{\frac{q - \sqrt{qq - pp}}{2}} + \sqrt{\frac{q + \sqrt{qq - pp}}{2}}$; etenim ſi hoc totum quadrabis, prodibit $p + q$; idque poſitum pro xx in æquatione $xx - p - q = o$ eam perbelle verificabit.

Cum ſit vero radix utraque imaginaria, ſi ſit p majus quam q, ſummam tamen numquam non realem eſſe oportet; eſt enim ipſa valor incognitæ x, quæ valores tantum habet reales.

Hæc ſcripſi, mi Ratta ſuaviſſime, fortaſſe obſcurius, quam res ipſa poſtulabat, confiſus ſcilicet diligentia tua, quæ facit ſæpe, ut ſim ipſe in ſcribendo negligens.

AD-

Digitized by Google

ADDITA.

Nota I.

Ex æquatione $3zyy + 3zzy - py - pz = 0$ facile huc devenies $yy + zy - \frac{py}{3z} = \frac{p}{3}$, ſive $yy + \frac{3zzy - py}{3z} = \frac{p}{3}$. Hic de more ſume $\frac{3zz - p}{3z}$ ac divide per 2, tum quadra, & quadratum adde utrique parti. Habebis iam $yy + \frac{3zzy - py}{3z} + \frac{9z^4 - 6zzp + pp}{36zz} = \frac{9z^4 - 6zzp + pp}{36zz} + \frac{p}{3} = \frac{27z^4 + 3pp + 18zzp}{3 \cdot 36zz}$, ſive $yy + \frac{3zzy - py}{3z} + \frac{9z^4 - 6zzp + pp}{36zz} = \frac{9z^4 + 6zzp + pp}{36zz}$. Adverte, hanc partem ultimam eſſe quadratum ſummæ $\frac{4zz + p}{6z}$. Quare, extrahendo radicem de more ex utraque parte, habebis $y + \frac{3zz - p}{6z} = \pm \frac{3zz + p}{6z}$. Unde facile erues $y = \frac{p}{3z}$, & $y = -z$.

Nota II.

Ex æquatione $\frac{p}{3x} = \sqrt[3]{q - x^3}$ ſtatim huc devenies

nies $\frac{p^3}{27 \cdot z^3} = q - z^3$, ſive $p^3 = 27 q z^3 - 27 z^6$, ſive $z^6 - q z^3 = -\frac{p^3}{27}$. Tractando hanc tamquam quadraticam, habebis $z^6 - q z^3 + \frac{qq}{4} = \frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}$; unde $z^3 - \frac{q}{2} = \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, ac demum

$$z^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}, \text{ et } z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

DE CONSTRUCTIONIBUS ÆQUATIONUM.

Admonitio breviſſima.

Æquationem reſolvi dico, cum valores incognitæ x educuntur per litteras expreſſi; conſtrui, cum certa linearum deſcriptione determinantur. De conſtructionibus paucula te monebo, non ut rem tractem, ſed ne omnino prætermiſiſſe videar. Eſt autem prius de æquationibus indeterminatis dicendum, quæ & ſuam habent conſtructionem, ut mox videbimus, & ad conſtructionem æquationum determinatarum aperiunt viam.

De æquationibus indeterminatis.

Æquatio indeterminata ea eſt, in qua variabiles duæ ſunt x, & y; quarum una prius pro voluntate ſumitur; tum altera, ut æquatio poſtulat. Itaque unam variando, variat & altera.

Quod ſi una verbi gratia x ab eodem ſemper puncto A (*Fig. 26.*) initium ducat, per eamdemque lineam AQ extendatur; ut ſi pro x ſumas modo AP, modo Ap; altera vero y ducatur ab extremo puncto P, vel p, ut PM, pm, ad eumdem ſemper angulum APM, Apm, erunt puncta M, m in linea quadam, interdum recta, ſæpiſſime curva. Exempli cauſa ſit æquatio $xx = ay$, unde $y = \frac{xx}{a}$. Sume pro x quamlibet AP. Tum ſume eam y, quæ æquet $\frac{xx}{a}$, & hanc conſtitue in PM. Variata in infinitum x (AP) in infinitum variabitur y (PM), eruntque omnia puncta M in linea quadam. Hæc linea dicitur locus; æquatio autem, uti $xx = ay$, dicitur eſſe ad talem locum.

Productum variabile eſt id, quod fit variabilem per variabilem multiplicando, ac tot dimenſionum eſſe dicitur, quot ſunt variabiles, e quibus producitur. Eſt ergo xx, vel xy, vel yy productum duarum dimenſionum; xxy vel xyy, vel y^3, vel x^3, trium; $xxyy$ quatuor; x^2y^3 quinque &c.

Si in æquatione productum variabile duas alicubi dimen-

dimenſiones habet, nuſquam vero plures, æquatio dicitur ſecundi gradus; ſi tres, tertii, &c. Æquatio ergo $xx + ay = o$ erit ſecundi gradus. Æquatio $bx^2 + x^2 y - a^2 y = o$ tertii, &c. Quod ſi in æquatione quapiam productum variabile nullum ſit, ut in hac $bx - cy = o$, æquatio dicitur primi gradus; quæ numquam non eſt ad lineam rectam, quod facile apparet, vel nullo admonente.

Æquationem indeterminatam ſecundi gradus, de qua ſermo inciderit, ſic ordinatam eſſe volo, ut in his exemplis $yy + xy + xx + ay + bx + ce = o$, ſive $xx + yx + yy + bx + ay + ce = o$. Nimirum ſit primo loco quadratum unius variabilis; iſque dicetur primus terminus; tum productum ex ambabus variabilibus; iſque erit ſecundus terminus; deinde quadratum alterius variabilis; iſque erit tertius terminus. Alii tres termini deinceps ſequantur eo ordine, qui in exemplis apparet.

Primum terminum ſigno poſitivo affectum volo, nulloque coefficiente præter quam 1. Reliqui termini ſigna habebunt, & coefficientes, uti res feret.

Si primo loco poſitum fuerit yy, dicetur æquatio ordinata per y; ſi xx, per x.

Si quis terminus æquationi cuivis propoſitæ abfuerit, eum adeſſe putabo coefficiente zero affectum.

Formulæ ſunt æquationes quædam maxime abſtractæ, quæ proponuntur, ut mutatis tantummodo conſtantibus in alias, atque alias vertantur. Harum

 ali-

aliquot ad ſectiones conicas pertinent; hæque plurimum valent ad conſtruendam æquationem quamlibet indeterminatam ſecundi gradus.

DE FORMULIS DUABUS AD PARABOLAM PERTINENTIBUS.

Formula prima.

Sit tibi recta indefinita A Z. (*Fig.* 27.) In hac ſume quamvis A B $= m$. Duc quamvis B E $= n$ quovis angulo A B E. Ac duc A E, quam facies $= e$. Duc præterea A D $= r$ parallelam B E, atque indefinitam D G parallelam A E, in eaque ſume quamvis D C $= u$. Finge tibi parabolam C M, cujus diameter C G, parameter L H $= p$. Ordinata G M parallela B E.

Iam vero in A Z ſume A P $= x$, & duc P M $= y$ parallelam B E, ſecantemque C G in G, & parabolam in M. Ex eo quod eſt C G . L H $= \overline{GM}^2$ æquationem duces parabolæ C M, quæ æquatio, rite ordinata per y, ſic erit

$$yy - \frac{2nxy}{m} + \frac{nnxx}{mm} - 2ry + \frac{2nrx}{m} + rr = 0.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{cpx}{m} + pu$$

Nempe formula prima.

For-

Digitized by Google

Formula ſecunda.

SIt tibi recta infinita AZ. [*Fig.* 28.] Duc quamvis $AB = m$ angulo quovis BAZ. Tum duc $BE = n$ parallelam AZ, & duc AE, quæ fiat $= e$. In AZ ſume $AD = r$, & duc DG indefinitam parallelam AE, in eaque ſume $DC = u$. Sitque parabola CM, cujus diameter CG, parameter $LH = p$, ordinata GM parallela BE.

Jam vero in AZ ſume $AP = x$, & duc $PM = y$ parallelam AB. Si ducatur MG parallela AP; ſecanſque diametrum CG in G, erit $CG . LH = \overline{GM}^2$. Hinc ergo æquationem duces parabolæ CM, quæ æquatio, rite ordinata per x, ſic erit

$$xx - \frac{2nyx}{m} + \frac{nnyy}{mm} - 2rz + \frac{2nry}{m} + rr = 0.$$
$$- \frac{epy}{m} + pu$$

Formula ſecunda.

De uſu harum formularum.

UTraque harum formularum eſt ſane ad parabolam, quæcumque ſint conſtantes n, r, p, u; quare ſi his tantum mutatis formula convertatur in æquationem quamvis datam, conſequens erit, hanc quoque eſſe ad parabolam. Ut id explores, ſtatim æquationem datam rite ordinabis ſive per y, ſive per

 x, ac

x, ac ſi quis terminus deſit, hunc tamen pones cum coefficiente zero. Quod ſi ordinaveris per y, refer te ad primam formulam, ſi per x, ad ſecundam. Convertetur autem formula in æquationem datam, ſi coefficientes ſingulorum terminorum iidem in utraque evadent, & ſextus terminus idem ac ſextus.

Sit æquatio data

$$yy - 2xy + xx - oy - bx + o = o$$

Formula prima

$$\left.\begin{array}{l} yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{ep}{m}x + pu \end{array}\right\} = o$$

Secundi termini coefficientes eoſdem reddes, ſi æquatis ambobus: $-\frac{2n}{m} = -2$ ſeparabis conſtantem n, atque in formula ubique pro n pones ejus valorem. In allato exemplo, cum inveniatur $n = m$, ſi ubique m poſueris pro n, eoſdem habebis coefficientes ſecundi termini tum in formula, tum in æquatione data.

Tertii termini coefficientes eoſdem habebis artificio nullo, ſi conditio quidem illa adſit, quæ adeſt commode in exemplo allato. Eſt autem conditio hæc: ut quemadmodum in formula coefficiens tertii termini $\frac{nn}{mm}$ eſt quadratum, quod fit ex dimidiato coefficiente ſecundi termini; ideſt ex $-\frac{n}{m}$, id etiam contingat in æquatione data. Et ſane in exem-

exemplo allato contingit; etenim in æquatione data coefficiens tertii termini eſt 1, idque ipſum eſt quadratum, quod fit ex dimidiato coefficiente ſecundi termini, ideſt ex -1. Si conditio hæc aderit, ubi coefficientes ſecundi termini eoſdem feceris tum in formula, tum in æquatione data; hoc ipſo eoſdem habebis etiam coefficientes tertii termini. Et ſane (ne ab exemplo diſcedam) eoſdem habebis, ſi ubique pro n poſueris m.

Quarti termini coefficientes facile eoſdem reddes, ſi æquatis ambobus: $-2r=o$, ſeparaveris r, & in formula ubique pro r ejus valorem pones; itaque in exemplo allato, cum inveniatur $r=o$, ſi in formula ubique pones o pro r, coefficientes quarti termini eoſdem habebis & in formula, & in æquatione data.

Quinti termini coefficientes ſimili modo eoſdem habebis. Ut maneam in exemplo; pones $\frac{2nr}{m} - \frac{ep}{m} = -b$, ſive (cum facta fuerit $r=o$) $-\frac{ep}{m} = -b$; tum ſeparabis p, atque invenies $p=\frac{mb}{e}$. Ubique ergo in formula pro p pones $\frac{mb}{e}$. Ac coefficientes quinti termini eoſdem habebis tum in formula, tum in æquatione data.

Sextum terminum pari modo eumdem reddes tum in formula, tum in æquatione data. Pones $rr+pu=o$, ſive (ſupplendo o pro r, & $\frac{mb}{e}$ pro p) $\frac{mbu}{e}=o$, & quoniam

niam invenies $u = o$, pones in formula o pro u; habebiſque etiam terminum eumdem tum in formula, tum in data æquatione. Sic formula converſa erit in æquationem datam mutatis tantummodo conſtantibus n, r, p, u.

Et ſane figuram, quam formulæ dedimus, compone ex valoribus harum conſtantium. Fac E B = A B, (*Fig.* 29.) ideſt $n = m$. Tum ducta A E, quæ denominabitur e, fac A D $= o$. Cadet punctum D in A & linea A G in A E. Fac etiam D C, ſive A C $= o$, & cadet etiam punctum C in A. Tum finge parabolam A M, cui ſit diameter A E, ordinata G M parallela B E, parameter vero ſit $\frac{mb}{e}$. Ac ſit tibi A P $= x$, P M $= y$ parallela B E, ſecanſque A E in G. (*Vide in Additis Notam I.*, & *III.*) Ubi hæc feceris, figuram formulæ in hanc converſam habebis, quæ hic adeſt. Ac ſi æquationem quæres parabolæ A M, illa ipſa prodibit æquatio, quæ data fuerat, quo certius conſtat, eam eſſe ad parabolam.

Quo tamen loco hoc tibi tenendum eſt. Si cujuſvis conſtantis n, r, u valor negativus prodierit, erit tibi ea conſtans ſumenda non ad illam partem, ad quam ſumta fuit in figura formulæ, ſed ad oppoſitam. Quod ſi negativus prodibit valor parametri p, erit etiam parabola in contrariam partem vertenda.

Poſſes æquationem datam, quoniam habet ambo quadrata yy, xx (*Vide in Additis Notam II.*, & *III.*)

or-

ordinare etiam per x, teque referre ad ſecundam formulam. Id ſi feceris, facile intelliges, præceptiones & monita redire eodem.

His omnibus facile conſtat, formulam quampiam parabolæ in unam quamque æquationem ſecundi gradus converti poſſe, ideoque hanc etiam eſſe ad parabolam, ſi modo adſit conditio illa, de qua ſupra dixi, ut coefficiens tertii termini æquale ſit quadrato, quod ſit ex dimidiato coefficiente termini ſecundi.

De formula ad Ellipſim pertinente.

ERo in hac brevior, vel potius, ſi ita vis, mi Ratta, negligentior. Sic enim fere gignitur ellipſeos formula, uti parabolæ; neque adhibetur aliter.

Sit tibi indefinita recta A Z. (*Fig.* 30.) In hac ſume quamvis A B $= m$. Duc B E $= n$, quovis angulo A B E. Tum duc A E, quam facies $= e$. Duc deinde A D $= r$ parallelam B E, ac per D indefinitam L K parallelam A E. In hac ſume D C $= u$. Tum hinc & hinc æquales duas C K, C L; ac ſit utraque $= t$. Finge iam tibi ellipſim L M K, cujus diameter L K, ea quidem, cujus ordinata G M, parallela B E, parameter vero L H $= p$.

Jam ergo ſi in A Z ſumſeris A P $= x$, tum duxeris P M $= y$ parallelam B E, ſecantemque L K in G, & ellipſim in M, cum ſit L G . G K, $\overline{GM}^2$: : L K, L H;

L H ; hinc æquationem duces ellipſeos L M K, quæ æquatio, rite ordinata, ſic erit

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr$$
$$+ \frac{eep}{2mmt}xx \qquad - \frac{2epu}{2mt}x - \frac{ptt}{2t} = 0$$
$$+ \frac{puu}{2t}$$

Scilicet ellipſeos formula hæc ipſa æquatio eſt, quæ numquam non ad ellipſim erit, quæcumque ſint conſtantes illæ quinque n, p, r; u, t. Quare ſi, his tantum mutatis, vertatur in datam æquationem quamlibet, non eſt dubium, quin hæc quoque ad ellipſim ſit. Periculum fiet comparando ſingulos terminos formulæ cum ſingulis æquationis datæ, ut ſupra fecimus. Exemplo ſit æquatio hæc data $yy + xx - ax = o$, quam, ne quis terminus deſit, ſic ſcribo $yy + oxy + xx + oy - ax + o = o$.

Secundum terminum cum ſecundo comparans, invenio n (B E) $= o$. Eoque intelligo, eſſe A E = A B, ideſt $e = m$.

Tertium cum tertio, invenio p [L H] $= 2t$. Infra inveniam valorem litteræ t, eumque huc transferam.

Quartum cum quarto, invenio r (A D) $= o$. Eoque intelligo, lineam L K cadere in lineam A E, ideſt in A B.

Quintum cum quinto, invenio u (DC) $= \frac{a}{2}$.

Sex-

Sextum cum ſexto, invenio t (CK, ſive CL) $= \frac{a}{2}$. Hunc valorem transfero in valorem ſupra inventum litteræ p, habeoque tandem $p = a$.

Hic dubium non eſt, quin, ſi valores inventi conſtantium n, p, r, u, t in formulam transferantur, ea convertatur in æquationem datam; ideoque æquatio data, ipſa quoque, ad ellipſim ſit.

Unum autem animadvertas, volo. In formula ellipſeos coefficiens tertii termini majus eſt quadrato, quod ſit ex dimidiato coefficiente termini ſecundi; eaque in ęquationem datam ſemper converti poterit, ſi æquatio data eamdem hanc habeat conditionem, veluti æquatio illa, quam ſupra dedimus, $yy + oxy + xx + oy$ &c., in qua coefficiens tertii termini eſt 1, majus quam quadratum, quod ſit ex dimidiato coefficiente o ſecundi tetmini; eſt enim hoc quadratum $= o$.

Ut parabola, atque ellipſis, ſic etiam hyperbola ſuas habet formulas, quas accuratius perſecuntur qui plus, quam ego, ingenio abundant, atque otio. His autem conſtat, indeterminatam nullam æquationem ſecundi gradus dari poſſe, ad quam hyperbolæ formula non deducatur, ſi hanc modo habeat conditionem, ut coefficiens tertii termini minus ſit, quam quadratum, quod ſit ex dimidiato coefficiente termini ſecundi.

Quo apparet, æquationem quamlibet indeterminatam ſecundi gradus eſſe vel ad parabolam, vel ad ellipſim, vel ad hyperbolam. Si coefficiens tertii termini æquale ſit ei quadrato, quod ſit ex dimidio coefficiente termini ſecundi, ad parabolam; ſi majus, ad ellipſim;

ſi minus, ad hyperbolam. Theorema longe nobiliſſimum.

De conſtructionibus æquationum determinatarum.

ÆQuationes determinatæ vel primi vel ſecundi gradus reſolutionem habent paratiſſimam; ideoque in his conſtructio minus quæri ſolet; potius quæritur in æquationibus tertii, vel quarti gradus. De his dicturus theorema prius exponam, quod totius artificii caput eſt.

Theorema.

PRopoſita ſit æquatio quævis determinata $xx+ax-bb=o$. Hinc primum excerpe incogniti quidpiam, puta xx, idque æquans variabili cuivis, puta ay; finge locum $xx=ay$. Tum, rediens ad æquationem propoſitam, pro xx ſubſtitue ay, ac finge locum alterum $ay+ax-bb=o$.

Duos hos locos ſic conſtrue, ut in utroque abſciſſa x ducatur ab eodem puncto A, (*Fig.* 31.) extendaturque ad eamdem partem per rectam AZ; ſitque ordinatarum angulus in utroque idem. Sit RL locus $xx=ay$. TV locus $ay+ax-bb=o$: Hique ſe interſecent in H. Duc ad lineam AZ ordinatam HI.

Dico, abſciſſam AI eſſe valorem, quem habet x in æquatione propoſita. Etenim hæc AI, ut quæ pertinet ad locum RL, ea certe eſt, ut quantitas

xx

xx æqualis ſit quantitati ay; ut vero pertinet ad locum TV, ea certe eſt, ut quantitas ay, adjuncta quantitati $ax - bb$, ſit æqualis zero. Ergo hæc abſciſſa AI ea eſt, ut quantitas xx, adjuncta quantitati $ax - bb$, æqualis ſit zero; ideſt ſit $xx + ax - bb = o$. Ergo hæc AI verificat æquationem propoſitam, eſtque valor incognitæ in tali æquatione.

Potuiſſes eodem modo ex æquatione propoſita excerpere x, ac ponere locum hunc $x = y$; tum, rediens ad æquationem propoſitam, ubivis ſubſtituere y pro x, ac ponere locum alterum, verbi gratia $xx + ay - bb = o$, vel $yx + ay - bb = o$, vel etiam $yy + ax - bb = o$. Nam conſtructo primo illo loco $x = y$, ſi horum quemlibet conſtruxiſſes, res bene ceſſiſſet.

De conſtructionibus æquationum determinatarum tertii vel quarti gradus.

HIs, quæ adhuc dixi, probe cognitis, ſatis erit, in æquationibus determinatis vel tertii vel quarti gradus, exempla paucula afferre.

Propoſita ſit æquatio $x^3 - bbx - c^3 = o$. Locum primum pone $xx = ay$. Tum inſere ubivis in æquationem propoſitam ay pro xx, habebiſque locum alterum $ayx - bbx - c^3 = o$. Quod ſi hos locos conſtruxeris ea ratione, quam ſupra monui, æquationem propoſitam iam facile conſtructam habebis per duos locos.

 Vel

Vel etiam pone primum locum $x = y$; tum pro x inſere ubivis y in æquationem propoſitam; habebiſque locum alterum $yxx - bbx - c^3 = o$, ſive $x^3 - bby - c^3 = o$, ſive $yxx - bby - c^3 = o$. Quod ſi locum primum $x = y$, & horum quemlibet conſtruxeris, non minus conſtructam habebis per locos duos æquationem propoſitam.

Propoſita ſit æquatio $x^4 + a^2x^2 - a^3x - b^4 = o$. Pone primum locum $xx = ay$; tum ubivis inſere in æquationem propoſitam ay pro xx; habebiſque locum alterum $ax^2y + a^2x^2 - a^3x - b^4 = o$, ſive $a^2y^2 + a^2x^2 - a^3x - b^4 = o$, ſive $a^2y^2 + a^3y - a^3x - b^4 = o$. Quod ſi primum locum conſtruxeris $xx = ay$, tum horum quemlibet, conſtructam facile habebis per duos locos æquationem propoſitam, ut ſupra monui.

His patet, eamdem æquationem per multa locorum paria conſtrui poſſe: illa autem præſtantiora habentur & commodiora, quorum loci non ultra ſecundum gradum efferuntur, de quibus ſupra dixi.

Atque per te ipſe facile intelligis, tot valores reales habere incognitam x in æquatione propoſita, quot ſunt puncta, in quibus loci, ad conſtruendum adhibiti, ſe interſecant; valores alios, ſi quos habebit, imaginarios eſſe; quod ſi nuſquam loci ſe interſecant, valores eſſe imaginarios omnes. Quam tamen rationem nolim ita perpetuam habeas, quaſi numquam fallere poſſit; fallit enim aliquando, niſi cautio quædam adhibeatur, quod alias explicabo.

Conſtruendi rationem habes, mi Ratta jucundiſ-

ſime,

ſime, non perfectam illam quidem, neque abſolutam, ſed vix attactam, inchoatamque; quam tu, ſi voles, perficies, ſcriptores claros conſulens, Hoſpitalium præſertim clariſſimum inter omnes.

ADDITA.

Nota Prima.

Figura formulæ primæ ex valoribus inventis conſtantium n, r, p, u hanc formam accipit. Eſt $AB = BE = m$. (*Fig.* 32.) Ponitur ſemper $AE = e$. Eſt autem AE diameter parabolæ AM, cujus ordinatam eſſe volumus GM parallelam BE, parametrum vero $p = \frac{mb}{e}$.

His poſitis ſume $AP = x$. $PM = y$, parallelam BE, ſecantemque AE in G; ac, cum ſit $\overline{GM}^2 = AG.\frac{mb}{e}$, æquationem parabolæ AM ex his tantummodo tibi compara.

Cum ſit $AB = BE$, erit etiam $AP = PG = x$; ideoque $GM = y - x$. Præterea cum ſit $AB, AE :: AP, AG$, erit $AG = \frac{ex}{m}$, unde æquatio exſiſtet $yy - 2xy + xx = \frac{ex}{m}.\frac{mb}{e}$, ſive $yy - 2xy + xx - bx = 0$. Æquatio illa ipſa, quæ data fuerat.

No-

Nota Secunda.

Si æquationem datam referas ad ſecundam formulam, valores conſtantium n, r, p, u hos habebis $n = m$, $r = \frac{b}{2}$, $u = \frac{-be}{4m}$, $p = \frac{mb}{e}$. Figura vero hanc formam accipiet. Erit $AB = BE = m$. (*Fig.* 33.) (Ponitur ſemper $AE = e$) Erit $AD = \frac{b}{2}$, $CD = \frac{be}{4m}$, quæ erit diameter parabolæ CM, cujus ordinata GM parallela BE, ſive AP, parameter vero $= \frac{mb}{e}$. Sume iam $AP = x$, $PM = y$ parallelam AB, ac tibi compara æquationem parabolæ CM.

Produc MG, ut ſecet AE in F, AB in Q. Erit $QM = AP = x$. $AQ = PM = y$. Cum ſit $AB = BE$, erit $AQ = QF$, ergo $QF = y$. Erit etiam $FG = AD = \frac{b}{2}$. Ergo $GM = x - y - \frac{b}{2}$. Præterea cum ſit $AB, AE :: AQ, AF$, erit $AF = \frac{ey}{m} = DG$. Quare cum ſit $CD = \frac{be}{4m}$, erit $CG = \frac{be}{4m} + \frac{ey}{m}$. Iam vero cum ſit $\overline{GM}^2 = CG \cdot \frac{mb}{e}$, hinc æquationem duces parabolæ CM.

$$xx + yy + \frac{bb}{4} - 2yx - bx + by = \frac{be}{4m} \cdot \frac{mb}{e} + \frac{ey}{m} \cdot \frac{mb}{e}$$

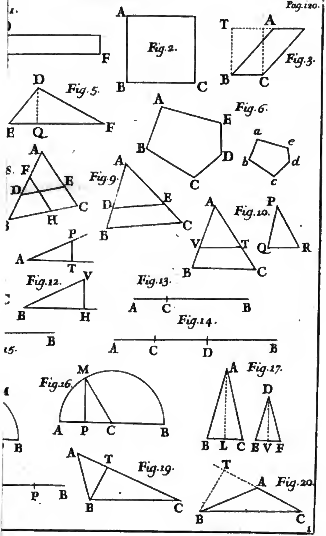
quæ ſi erit expurgetur, erit $xx - 2yx + yy - bx = 0$: illa ipſa æquatio, quæ data fuerat.

Nota

Nota Tertia.

QUamvis æquatio, quæ e formula ducitur, eadem ſit atque æquatio data, non erit tamen ad eamdem parabolam, niſi ſi angulus coordinatarum x & y idem ſit in utraque. Quare, ut ſit idem, ſi æquatic data referatur ad primam formulam, curandum erit, ut angulus E B A æqualis ponatur angulo, quem faciunt coordinatæ in data æquatione; quippe cum in hac formula ponatur y (P M) parallela lineę B E. Tale aliquid curandum erit in linea A B, ſi æquatio data referatur ad ſecundam formulam; quippe cum in hac formula ponatur y (P M) parallela lineę A B.

Digitized by Google


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 19.
Fig. 20.

Digitized by Google

DE
VIRIBUS
CENTRALIBUS

Quibus corpora per ſectiones conicas volvuntur, centro virium in foco manente, brevis ac facilis expoſitio in capita ſex diſtributa.

OPUSCULUM

Eorum gratia conſcriptum, qui ad Nevtonianorum phyſicam introduci volunt.

Digitized by Google

FRANCISCUS MARIA ZANOTTUS

TORQUATO VARENO

Adoleſcenti ſuaviſſimo, atque optimo

S. P. D.

Quidam ſunt, nec ita pauci, quod tibi jam, mi Torquate, per ætatem cognoſcere vix licet, qui in iſto, in quo tu verſaris, phyſicæ ſcientiæ curriculo magni Nevtoni nomine uſque adeo ſe ſinunt abripi, ut quem numquam fortaſſe legerint, cujuſque ne unam quidem propoſitionem demonſtrare poſſint, ſi velint, eum tamen ſe unice admirari prædicent, & in deliciis habere. Quorum rationem etſi probare nullo modo poſſum, non omnino tamen, quod multi faciunt, velim reprehendere; ac potius, quod Nevtonum ament, laudem; quod ejus doctrinam minus teneant, ignoſcam. Id enim non tam ipſorum ſegnitie fieri arbitror, quam illorum ingenio, qui nobiliſſima ac prope divina ſummi Philoſophi inventa tractaverunt. Hi ſiquidem, ut mathematici fere ſunt excellentiſſimi, indulgentes ſibi, vagantur interdum latius, nec niſi per exquiſitiora artificia longeque petita, ad ea, quæ phyſicorum ſunt, accedunt. Quæ phyſici quidem, ſi paucos excipias, vix poſſint aſſequi. Sunt enim plerique a geometria, atque algebra haud ſatis inſtructi, quippe qui naturalium rerum ſtudio abrepti mathematicos ſe eſſe mediocres facile patiuntur. Atque

Digitized by Google

FRANCISCUS MARIA ZANOTTUS

TORQUATO VARENO

Adoleſcenti ſuaviſſimo, atque optimo

S. P. D.

Quidam ſunt, nec ita pauci, quod tibi jam, mi Torquate, per ætatem cognoſcere vix licet, qui in iſto, in quo tu verſaris, phyſicæ ſcientiæ curriculo magni Nevtoni nomine uſque adeo ſe ſinunt abripi, ut quem numquam fortaſſe legerint, cujuſque ne unam quidem propoſitionem demonſtrare poſſint, ſi velint, eum tamen ſe unice admirari prædicent, & in deliciis habere. Quorum rationem etſi probare nullo modo poſſum, non omnino tamen, quod multi faciunt, velim reprehendere; ac potius, quod Nevtonum ament, laudem; quod ejus doctrinam minus teneant, ignoſcam. Id enim non tam ipſorum ſegnitie fieri arbitror, quam illorum ingenio, qui nobiliſſima ac prope divina ſummi Philoſophi inventa tractaverunt. Hi ſiquidem, ut mathematici fere ſunt excellentiſſimi, indulgentes ſibi, vagantur interdum latius, nec niſi per exquiſitiora artificia longeque petita, ad ea, quæ phyſicorum ſunt, accedunt. Quæ phyſici quidem, ſi paucos excipias, vix poſſint aſſequi. Sunt enim plerique a geometria, atque algebra haud ſatis inſtructi, quippe qui naturalium rerum ſtudio abrepti mathematicos ſe eſſe mediocres facile patiuntur. Atque

Digitized by Google

his quidem, quoniam Nevtoniani quoquo modo eſſe volunt, gratum ſit, puto, ſi qui leges omnes atque hypotheſes, quibus natura nequaquam utitur, prætermittens, ea ſtatim, quæ phyſicæ conjunctiora ſunt, arripiat, & in unum colligens ſecernat ab aliis, & minus ingenioſe tractet. Id ego ſuperioribus menſibus, cum valetudinis mihi atque otii ſatis eſſet, ex aliqua parte tentare decrevi. Libellum ergo confeci de viribus centralibus, ut in ſectionibus conicis maxime ſe produnt, qui locus philoſophiæ Newtonianæ ſummam fere continet, eſtque ad phyſicas cæleſtium corporum converſiones explicandas aptiſſimus. Omnia vero, quæ quidem in illo argumento prima ſunt, breviſſimis calculis minimeque artificioſis comprehendere conatus ſum, ut, quantum ſimplicitas poſſit, experirer. Quid profecerim, tute videris. Libellum enim tibi inſcriptum ad te mittere decrevi, ut teſtem haberes amoris erga te mei. Quod ſi illum cum præceptore tuo, quem vehementer ſuſpicio, & in pauciſſimis ſane numero, per otium communicaveris, meque, ſi quid vobis erraſſe videbor, pro amicitia noſtra monueris, tam gratum erit quam quod gratiſſimum; nam quamvis mathematicis concedi non ſoleat, ut timeant ne errent, id mihi tamen concedi volo homini non mathematico. Ceterum quamvis brevitatem ubique ſtuduerim, non eam tamen exſpectes velim, quam plerique, docti præſertim homines atque induſtrii, conſectantur, quæque eum elegantiori quodam artificio conjuncta eſſe ſolet. Quæ enim ſic explicantur, etſi ſunt brevia, moram tamen legentibus ſæpe afferunt, neque

rem ſtatim cognoſci ſinunt; itaque multos deterrent. Quare illud etiam curavi, quantum potui, ut eſſem ſine artificio brevis. Tuum erit elegantiam brevitati addere, putabiſque me hunc locum induſtriæ tuæ relinquere voluiſſe. Sic enim exiſtimo, adoleſcentulos, ingenioſos præſertim tuique ſimiles, non omni labore, ut multi jam putant, levandos eſſe, ſed exerceri oportere, eorumque ingenia torqueri paululum, quo fiant acutiora.

Sed jam quæres, quæ te ſcire oporteat, antequam ad libellum hunc noſtrum legendum accedas. Perpauca, mi Torquate. Communis ſcilicet geometriæ elementa ſcias velim; & ſectionum conicarum definitiones, primaſque proprietates tantum non ignores. Quod ſi quæ erunt, quas te nondum vidiſſe ſuſpicer, de iis ſuo loco monebo. Sis etiam volo a communi Carteſianorum algebra paulo inſtructior, neque tractandarum æquationum ratio te fugiat. In quo quidem te jam inter æquales tuos excellere & intelligo, & magnopere gaudeo.

Ex illa vero reconditiori geometria, qua nihil his temporibus eſt illuſtrius, quæque infiniteſimalis dici ſolet, ſatis erit, ſi illud teneas, quod in ea diſciplina primum eſt, quantitatem infiniteſimam pro nulla haberi poſſe, ſi cum ea comparetur, ad quam infiniteſima eſſe dicitur; itaque æqualia eſſe quæcumque differentiam tantum habent infiniteſimam. Neque, ſi quantitatem infiniteſimam poſueris, refugias aliam rurſum ponere, quæ ſit ad eam, quam poſuiſti, infiniteſima; eoque modo ad infinitos infiniteſimorum ordines alios aliis inferiores excurras. Quod unum ſi animo comprehenderis, facile etiam

tiam intelliges & curvam quamvis lineam perinde haberi poſſe, ut ſi ex infinitis lineolis rectis conſtaret; & unamquamque ex his lineolis, ſi producatur, tangentem eſſe; & angulum, quem linea tangens cum curva facit, eſſe infiniteſimum. Neque omnino, ſi quantitas proponatur, cujuſcumque tandem ſit generis, quę perpetuo variet, eam recuſabis perinde accipere, ac ſi variet per intervalla infiniteſima; ſit vero in unoquoque intervallo conſtans. Velut, ſi corpus in motu poſitum velocitatem perpetuo variet, hanc putabis in tempuſculis aliis aliam eſſe, in unoquoque conſtantem. Quę quidem expeditiſſima ei ſint, qui ſe in Leibnitianorum calculo aliquantulum exercuerit; quapropter ſi hunc etiam attigeris, in eoque paululum progreſſus fueris, quantulumcumque id ſit, haud erit inutile.

Jam vero quoniam monere te cœpi, hęc etiam habe. Æquationes tibi in hoc, quem ad te mittimus, libro ſępe occurrent, non omnino illarum ſimiles, quę in geometricis quęſtionibus tractandis occurrere paſſim ſolent; hę quippe duarum quantitatum ęqualitatem exprimunt; noſtrę illę analogiam, ſive proportionalitatem potius quamdam. Velut ſi poſuero $u = x$*, ſit autem mihi* u *velocitas,* x *vero linea quępiam; velocitatem utique non æqualem lineæ eſſe, ſed proportionalem intelligam; quod ambæ ſcilicet, cum linea, tum velcoitas, eadem proportione perpetuo varient. In his ergo æquationibus, quod tute vides, multiplicari pars altera per conſtantem quamlibet quantitatem poterit, ſalva æquatione; nam quamvis ea multiplicatione æqualitas tolla-*

tur,

tur, proportionalitas non tollitur. Neque minus licebit, utramque partem per eamdem quantitatem multiplicare, nam ne hoc quidem tollitur proportionalitas. Quin & radices ambarum partium extrabi tuto poterunt, & quadrata fieri; ſi enim quantitates ipſæ proportionales inter ſe ſunt, oportet ſane & earum radices proportionales inter ſe eſſe, & quadrata.

Et quoniam in quæſtionibus, quæ per hujuſmodi æquationes tractantur, non niſi proportionalitas quædam quæri ſolet, liberum cuique erit, ſi quantitates duæ proportionales inter ſe fuerint, alteram alteri ſubſtituere pro voluntate, puta circumferentiæ diametrum, ſive radium, ſeu quidquid aliud proportionale circumferentiæ eſt.

Neque vero in explicandis, conſtruendiſque quantitatum valoribus generum te offendat diverſitas: velut ſi certum ſpatium propoſuero diviſum per tempus quodpiam, idque dixero velocitatis cujuſdam menſuram eſſe; in quo ne te illud turbet, quod tempus, & ſpatium genere ipſo inter ſe diſtant; velocitas autem genus tertium eſt. Nam & ſpatium certam habet in ſuo genere unitatem, ad quam ſi referatur, numero poſſit exprimi, & tempus pariter in ſuo genere unitatem habet ſuam. Quod ſi tempus & ſpatium ad unitatem unumquodque ſuam referantur, & numeris exprimantur, exiſtet ex horum diviſione numerus, quem pro velocitatis menſura habeas.

Preſſius hæc dixi, non enim docere te volui, ſed tantum monere. Tu autem eo ingenio es (quod & per

me ipſe alias cognovi, & omnes, qui iſtinc ad nos veniunt, quique tecum fuerunt, teſtantur) ut fortaſſe ne moneri quidem opus habeas. Vale, mi Torquate, & quantum ego te diligo, tantam fac, ut me abs te diligi intelligam.

DE

DE VIRIBUS CENTRALIBUS

QUIBUS CORPORA PER SECTIONES CONICAS VOLVUNTUR

AD TORQUATUM VARENUM.

PROLEGOMENA.

De motu generatim.

ANtequam vires centrales exponere ingredior, non alienum erit, mi Torquate, pauca quædam monere, eorum præſertim cauſa, qui mechanicarum rerum ſunt plane rudes; nam quamvis expeditiſſima ſint, ac prope in medio poſita; iis vero, qui rem mechanicam vel leviter attigerunt, paratiſſima; tamen, quia ſunt neceſſaria, non videntur prætermittenda. Exordiar a motu, quem generatim primum, & quatenus tantum motus eſt, conſiderabo.

1. In corpore, quod movetur, tria præſertim veniunt conſideranda, maſſa corporis, velocitas, vis motrix. Ac maſſa quidem nihil eſt aliud niſi materia, qua corpus conſtat. Materia autem omnis eo ingenio eſſe creditur, ut quem motum ſemel acceperit, niſi ſi quid extrinſecus intercedat, eumdem perpetuo ſervet.

2. Velocitas eſt diſpoſitio corporis ad certum ſpatium certo tempore conficiendum. Eaque tanto major eſſe cenſetur, quanto majus eſt ſpatium, & quanto minus eſt tempus. Velocitatem ergo recte exprimes dividendo ſpatium per tempus. Sit velocitas $= V$. Spatium $= S$. Tempus $= T$. Erit $V = \frac{S}{T}$.

3. Hinc ſequitur, ut ſpatium ſit velocitas ipſa ducta in tempus; ſi enim eſt $V = \frac{S}{T}$, erit etiam $S = VT$.

4. Sequitur etiam, ut tempus ſit ſpatium diviſum per velocitatem; ſi enim eſt $V = \frac{S}{T}$, ut modo diximus; erit etiam $T = \frac{S}{V}$.

5. Porro cum velocitas exprimatur ſpatio diviſo per tempus, ſatis conſtat, velocitates eſſe ſpatiis proportionales, ſi tempora quidem ſint æqualia; ac viciſſim tempora æqualia eſſe, ſi velocitates proportionales ſint ſpatiis.

6. Conſtat etiam, velocitates æquales inter ſe eſſe, ſi ſpatia ſint temporibus proportionalia. Hæc atque alia vel leviter attendenti ſua ſponte ſe produnt.

7. Vis motrix eſt vis illa, quæ velocitatem creat in corpore; ac tanto major eſſe cenſetur, quanto eſt major velocitas, quam creat; & ſimul quanto major eſt maſſa corporis, in quo illam creat; itaque vim motricem recte exprimes multiplicando maſſam per velocitatem. Si ergo corporis maſſa $= M$. Velocitas $= V$. Erit vis motrix $= MV$.

8. Hinc

8. Hinc multa profluunt uſque adeo manifeſta, ut demonſtrationem non deſiderent. Ac primum cum ſit vis motrix, uti dixi, $= M V$, ſtatim conſtat, vires eſſe maſſis proportionales, ſi velocitates quidem æquales ſint; ac ſi æquales ſint maſſæ, eſſe vires proportionales velocitatibus.

9. Neque minus conſtat, haberi velocitatem corporis, ſi vis dividatur per maſſam, & ſimiliter haberi maſſam, ſi vis dividatur per velocitatem.

10. Quod ſi vires duæ ſint æquales, cum ſit utraque productum maſſæ & velocitatis, erunt ſane maſſæ reciproce proportionales velocitatibus; & viciſſim ſi fuerint maſſæ reciproce proportionales velocitatibus, oportebit vires æquales eſſe. Hæc de motu generatim dixiſſe ſatis ſit.

De motu compoſito.

11. Agatur corpus A uno tempore duabus viribus duas diverſas directiones A B, A C (*Fig.* 1.) habentibus. Sume lineas duas A B, A C proportionales ipſis viribus, tum parallelogrammum B C conſice. Feretur corpus, quod omnes conſentiunt, per diagonalem A D, ea quidem vi, quam linea ipſa A D exprimet.

12. Vis, qua corpus fertur per A D, dicitur vis compoſita. Motus quoque ipſe per A D motus com-

poſitus appellatur. Vires A B, A C, nec non & motus ipſi per lineas A B, A C, dicuntur componentes.

13. Quoniam vis compoſita A D, & vires componentes A B, A C in eadem maſſa conſiderantur, ſequitur, ut velocitatibus proportionales ſint (8.). Et quoniam propoitionales quoque ſunt lineis A D, A B, A C, ſequitur ut etiam velocitates ſint lineis eiſdem proportionales. Quo ergo tempore percurrit corpus lineam A D vi compoſita, eodem tempore percurreret lineam A B, ſi ſola vi A B ageretur; & lineam A C, ſi ageretur ſola vi A C (5.).

14. Quod ſi virium tum compoſitæ, tum componentium directiones A D, A B, A C datæ fuerint, nihil erit expeditius, quam tres lineas conſtituere, quæ vires ipſas, ideoque etiam velocitates exprimant. Nempe ſi a quovis puncto D directionis A D ducantur lineæ D C, D B parallelæ directionibus A B, A C, compleaturque parallelogrammum B C. Etenim lineæ tres A D, A B, A C, ut facile apparet, vires ipſas expriment, A D quidem vim compoſitam, A B, A C vires componentes.

Permulta ab auctoribus de motu compoſito tradi ſolent; elegantia illa quidem, ſed ad ea, quæ de viribus centralibus dicenda nobis ſunt, minus neceſſaria. His ergo omnibus ſuperſedebimus.

De

De vi attractiva.

15. Vis attractiva, quæ etiam gravitas appellari ſolet, univerſæ materiæ æque communis eſſe creditur. Itaque corpus quodvis A trahit ad ſe corpus quodvis B, ac tanto majorem in illud vim exercet, quanto major eſt maſſa cum corporis A, tum corporis B; quippe quia unaquæque pars corporis A vim exercet ſuam, eamque exercet in unamquamque partem corporis B.

16. Erit ergo vis attractiva in proportione compoſita maſſarum. Sit maſſa corporis $A = M$; corporis $B = m$. Erit vis attractiva $= Mm$, ſi maſſis quidem æſtimanda tantum ſit. Æſtimari autem ſolet non maſſis tantum, ſed etiam poteſtate quapiam diſtantiæ illius, quæ inter corpora ſe mutuo trahentia intercedit. Hinc multæ & variæ attractionis leges, ut cuique libet, fingi poſſunt. Vulgo tenet lex illa, ut tanto major cenſeatur eſſe vis attractiva, quanto minus eſt diſtantiæ quadratum. Quare ſi diſtantia, quæ intercedit inter corpora A, & B, ſit $= D$, erit jam vis attractiva $= \frac{Mm}{DD}$. Hanc legem ſequemur, ubicumque de maſſæ cujuſpiam attractione ſermo incidet.

17. Non eſt dubium, quin vis attractiva æque urgeat utrumque corpus A, & B; valet enim in utroque par ratio. Neque minus conſtat, vim attractivam in unoquoque momento temporis velocitatem

quam-

quamdam minimam utrique corpori tribuere. Quod idem faciunt & aliæ vires, quotcumque corpori perpetuo inſtant. Velocitas hæc minima appelletur velocitas initialis.

18. Cum ambo corpora A, & B momentis ſingulis urgeantur, ut modo dixi, æquali vi; ſequitur, ut velocitates initiales reciproce proportionales ſint ipſorum maſſis (10.)

19. Et quoniam velocitas corporis habetur dividendo vim per maſſam (9.), vis autem, qua utrumque corpus urgetur eſt $\frac{Mm}{DD}$; velocitas initialis corporis A, cujus maſſa eſt M, erit $\frac{m}{DD}$; velocitas initialis corporis B, cujus maſſa eſt m, erit $\frac{M}{DD}$. Igitur utriuslibet corporis velocitas initialis eſt maſſa corporis alterius diviſa per quadratum diſtantiæ. Quo ſtatim patet, velocitatem utriuslibet corporis eamdem manere, quantacumque ejus ſit maſſa.

20. Mos tenet, ut corporis cujuſque maſſa perinde conſideretur, quaſi in unum punctum collecta eſſet; quod punctum tanto majorem vim attractivam habere exiſtimatur, quanto plus maſſæ in ipſo inſidere fingitur.

21. Fingi etiam ſolet, duorum corporum ſe mutuo trahentium alterum quidem ſic teneri, ut moveri ne poſſit; alterum vero ad ipſum, tamquam ad centrum, ferri. Has mathematicorum conſuetudines, pro eo ut res feret, ſequemur.

De

Digitized by Google

De gravitate conſtanti.

22. Cum vis attractiva, ſeu gravitas, quemadmodum ſupra dixi, non maſſæ tantum magnitudine, ſed etiam diſtantia æſtimari debeat, conſequens ſane eſt, ut gravitas corporis ad centrum, a quo trahitur, accedentis perpetuo variet, quippe quia perpetuo variat diſtantia. Juvat tamen ſimpliciſſimam hypotheſim in præſens perſequi, ac cognoſcere, quod ſpatium percurrat corpus cadendo, qua velocitate, quo tempore, ſi verſus centrum feratur gravitate conſtanti, quæ nempe eadem ubique ſit, & æqualem corpori velocitatem perpetuo tribuat. Quo loco quoniam a magnitudine maſſæ præſcinditur, idcirco putabimus, gravitatem velocitati ipſi initiali proportionalem eſſe; quam ſcilicet velocitatem certo conſtitutoque tempuſculo gravitas ipſa gignit in corpore. Hoc præmiſſo ad caſum corporis venio.

23. Linea recta A T (*Fig.* 2.) tempus exprimat, quo corpus a quiete diſcedens verſus centrum deſcendit. Conſtituantur partes ejus infiniteſimæ & æquales A *m*, *m n*, *n o*, &c. quæ exprimentt tempuſcula certa infiniteſima, & æqualia. Primo tempuſculo A *m* accipiet corpus a gravitate velocitatem quamdam minimam. Hanc exprimat lineola *A u*. Rectangulum *m u* exprimet ſane ſpatium a corpore, tempuſculo *A m*, velocitate A *u*, percurrendum (3.). Sic fit primo tempuſculo; videamus, quid fiat reliquis; ſed prius diagonalem A *x* producamus, donec ſecet lineam

neam T R, parallelam lineæ *m x*, in R. Secundo ſane tempuſculo *m n*, accipiet corpus a gravitate velocitatem aliam æqualem primæ, primamque adhuc retinens, feretur velocitate dupla. Velocitatem hanc exprimet lineola *n z*, parallela lineæ *m x*, ſecanſque A R in *z*. Rectangulum *n y* exprimet ſpatium a corpore, tempuſculo *m n*, velocitate *n z* percurrendum.

Quod ſi ad alia atque alia tempuſcula eodem modo proceſſeris, donec expleas triangulum totum A T R, linea A T exprimet tempus, quo corpus deſcendit; T R velocitatem, quam corpus obtinet in fine deſcenſus; ſumma vero rectangulorum *m u*, *n y*, *o p*, &c. exprimet ſpatium, quod corpus deſcendendo confecit. Et quoniam ſumma rectangulorum *m u*, *n y*, *o p*, &c. nihil differt a triangulo ipſo A T R, quippe quia prominentia acumina *u*, *y*, *p*, &c. ſi in unam ſummam conferantur, ac cum triangulo A T R comparentur, infiniteſimum quidpiam ſunt; idcirco ſpatium, quod corpus deſcendendo conficit, exprimetur triangulo ipſo A T R.

24. His poſitis facile intelligitur, velocitatem T R, quam corpus obtinet in fine deſcenſus, duplam eſſe ejus velocitatis, qua deſcendendo ſpatium A T R, conficit. Hac enim velocitate in tempore A T conficit ſpatium, quod exprimitur triangulo A T R, ut modo oſtendimus. Velocitate vero T R, quam obtinet in fine deſcenſus, conficeret in eodem tempore A T ſpatium, quod rectangulo ex A T, & T R ex-

exprimitur (3.), quod rectangulum trianguli A T R duplum eſt.

25. Neque minus patet, ſpatium, quod corpus deſcendendo percurrit, quodque exprimitur triangulo A T R, eſſe in ratione compoſita gravitatis, ſeu velocitatis initialis, quæ exprimitur lineola A *u*, ſive *m x*, & quadrati temporis, quod tempus exprimitur linea A T. Manifeſtum eſt enim triangulum A T R tanto eſſe majus, quanto major eſt *m x*, ſi ſit quidem A T conſtans; & ſimul tanto eſſe majus, quanto eſt majus lineæ A T quadratum, ſi ſit quidem conſtans *m x*.

26. Si ergo ſit ſpatium $= S$. Tempus $= T$. Gravitas, ſeu velocitas initialis $= G$. Erit $S = GTT$.

Adnotatio. Agitur de caſu corporum ex gravitate conſtanti, ac facto ſpatio $= S$, tempore $= T$, gravitate $= G$ ponitur $S = GTT$. Sunt qui mallent $2S = GTT$, quorum ratio hæc eſt. Gravitas, quæ utique intelligi debet in tempus ducta, nam niſi per tempus aliquod duret motum efficere nullum poteſt, gravitas, inquam, definiri, ac determinari debet per totum effectum, quem tali tempore parit, non per aliquam tantum effectus partem. Effectus autem totus, quem parit, eſt illa velocitas, quam corpus habet in fine deſcenſus, quæ utique eſt $\frac{2S}{T}$. Igitur poni debet $GT = \frac{2S}{T}$, unde $2S = GTT$. Niſi ſi volumus reſpectivam tantum æquationem, ſeu formulam condere, per quam o-

ſtendatur non quanta res ſit, ſed qua proportione augeatur, aut minuatur. Quod ſi hoc unice volumus recte ponetur $GT = \frac{S}{T}$, & $S = GTT$. Sed ſi his formulis aliquando utemur tamquam abſolutis, in errorem incidemus.

Placet ad id paucula animadvertere. Gravitas in corpore cadente duas gignit velocitates, velocitatem deſcenſus, ſeu mediam, & velocitatem ultimam. Velocitas media eſt illa, qua corpus conficit ſpatium, per quod cadit, & hæc ſane eſt $\frac{S}{T}$; fingitur autem eſſe perpetua, & conſtans in corpore per totum tempus T, quamvis talis velocitas conſtans vere nulla ſit. Velocitas ultima eſt ſemper dupla velocitatis mediæ; eſt ergo $\frac{2S}{T}$.

Ad definiendam determinandamque gravitatem nihil intereſt utra velocitate media utaris, an ultima, nam altera alteram neceſſario involvit, neque enim poteſt eſſe media 3, quin ultima ſit 6, aut media 5, quin ultima ſit 10. Sic nihil intereſt, utrum circulus determinetur per radium, an per diametrum, nam magnitudo unius involvit magnitudinem alterius. Quamquam duo utique cavenda ſunt. Primum ut qua velocitate uno in loco uteris ad gravitatem determinandam, eadem ubique utaris; deinde ut ſi de ambabus velocitatibus ſermo incidat, ultima ſemper ponatur mediæ dupla. Hæc ſi caveantur, quæ

uti-

Digitized by Google

utique ubique caventur in hoc libello, nullus irrepere error poterit.

Neque vero ſi determinetur gravitas per velocitatem mediam, dicendum eſt eam determinari non per totum effectum, ſed per effectus partem, quaſi totus effectus ſit velocitas ultima $\frac{2S}{T}$, velocitas vero media $\frac{S}{T}$ ſit ejus pars. Etenim qui determinat gravitatem per velocitatem mediam, eam determinat etiam per velocitatem ultimam; nam, ut modo dixi, media neceſſario involvit ultimam, quare determinat utique gravitatem per effectum totum. Atque haud ſcio, an velocitas media, quæ eſt velocitas quædam conſtans, quam animo fingimus, dici vere poſſit pars velocitatis ultimæ.

Quamvis gravitas, ut modo dixi, per utramlibet velocitatem mediam vel ultimam determinari poſſit, melius tamen erat in num. 26 eam determinare per mediam ponendo $S = GTT$, quam per ultimam ponendo $2S = GTT$. Id ſic oſtendo. Non eſt dubium, quin vis centripeta ſit gravitas quædam conſtans, ſiquidem eſt vis illa, quæ efficit motum initialem, qua corpus incipiens labi verſus centrum, certum ſpatiolum conficit certo tempuſculo; eſt autem motus quivis initialis, ut vulgo conſtat, uniformiter acceleratus; conſtat ergo vim centripetam eſſe gravitatem quamdam conſtantem. Atqui tamen vis centripeta ex communi conſuetudine determinatur ſpatiolo illo ſimplici, quod corpus conficit, non autem

ſpatiolo duplo, ideoque determinatur per velocitatem mediam, non vero per ultimam.

Sic num. 32 vis centripeta æſtimatur lineola R *u*; idemque fit num. 46. 61. 80. 94. Conſentaneum ergo erat gravitatem determinare per velocitatem mediam etiam in num. 26, ponendo S = G T T, non vero per ultimam ponendo 2 S = G T T.

27. Quo ſtatim intelligitur, tempus deſcenſus eſſe radicem ſpatii diviſi per gravitatem. Si enim S = G T T, erit etiam $T = \sqrt[1]{\frac{S}{G}}$.

28. Et quoniam velocitas deſcenſus exprimitur ſpatio diviſo per tempus, erit hæc $= \frac{S}{\sqrt[1]{\frac{S}{G}}} = \sqrt{GS}$; nempe radix gravitatis ductæ in ſpatium.

29. Ac ſi hanc ipſam velocitatem, ideſt radicem gravitatis ductæ in ſpatium, duplicaveris, habebis velocitatem, quam corpus obtinet in fine deſcenſus (24.). Erit ergo velocitas in fine deſcenſus $= 2\sqrt{GS}$.

Non inutile erit has formulas memoria tenere. Quamquam qui primam illam S = G T T in animo infixam habuerit, alias ſibi ipſe, ſi res poſtulet, nullo labore parare poterit.

CA-

CAPUT I.

De Motu curvilineo generatim.

Lemma e geometria petitum.

30. A Puncto quovis R (*Fig.* 3.) curvæ cujuſvis R P, ducta R T tangente, ducantur intra curvæ concavum lineæ quævis duæ R F, R M. Sumatur arcus R L infiniteſimus, ducaturque L Q perpendicularis ad R F, nec non L y parallela tangenti R T, ſecans R F in x, R M in y.

Dico primum, omnia latera trianguli R x y eſſe infiniteſima ſecundi ordinis. Dico ſecundo, omnia latera trianguli L x Q eſſe infiniteſima primi ordinis.

Antequam hæc demonſtro, ducatur L T perpendicularis ad tangentem R T, nec non R u perpendicularis ipſa quoque tangenti R T, ſecanſque L y in u. Demum a puncto quovis F lineæ R F ducatur F M parallela & ipſa tangenti R T, occurrenſque lineæ R u productæ in H, & lineæ R M in M.

Demonſtro primam partem. Cum ſit angulus L R T infiniteſimus, ut qui ſit a curva & tangente, erit lineola L T infiniteſima, ſi ad lineam T R, ſive L R, comparetur; quare cum R L ponatur infiniteſima primi ordinis, erit L T infiniteſima ordinis ſecundi, ergo etiam R u, quæ eſt æqualis L T. Jam vero cum triangula R F H, R x u ſint ſimilia, ac latera

tera omnia trianguli R F H ſint aſſignabilia, oportebit latera omnia trianguli R $x u$ eſſe infiniteſima ejuſdem ordinis; erunt ergo omnia infiniteſima ordinis ſecundi. Eamdem rationem transferes ad latera omnia trianguli R $x y$ ex ſimilitudine triangulorum R F M, R $x y$.

Demonſtro partem alteram. Cum ſit L u infiniteſima primi ordinis, ut quæ æqualis eſt lineæ R T, ſi ei dematur pars $x u$, quæ, ut modo oſtendi, infiniteſima eſt ſecundi ordinis, erit adhuc reliqua L x infiniteſima primi ordinis. Jam vero cum triangulum L x Q ſimile ſit triangulo R $x u$, ideoque etiam triangulo R F H; ſint vero latera omnia trianguli R F H aſſignabilia, erunt latera omnia trianguli L x Q infiniteſima ejuſdem ordinis; ergo erunt omnia infiniteſima ordinis primi.

De moto curvilineo.

31. INcedens corpus per curvam lineam quamlibet R P (*Fig.* 4.) ſit jam in puncto quovis R. Hic ſane, ut omnes docent, vim facit, ut per tangentem R T excurrat. Ut ergo a tangente deflectat, & curvam lineam ſequatur, neceſſe eſt, ut vi alia quapiam urgeatur verſus aliquod punctum F, quod intra curvæ concavum ſit poſitum; ſic quidem, ut vi ex duabus compoſita per laterculum R L curvæ ſe immittat.

32. Vis, qua corpus excurrere nititur per tangen-

Digitized by Google

gentem R T, dicitur vis projectionis, ſeu tangentialis. Vis, qua trahitur verſus F, vis centripeta. Quod ſi a puncto quovis L laterculi R L ducantur lineæ L T, L *u* parallelæ directionibus R F, R T, completo parallelogrammo T *u*, exprimet ſane linea R L velocitatem, qua corpus ex R in L fertur; linea R T exprimet velocitatem tangentialem; linea R *u* velocitatem initialem a vi centripeta ortam (14.).

33. Quare ſi ſint arcus duo quivis infiniteſimi R L, *r l* vel in eadem curva, vel in diverſis, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleanturque parallelogramma T *u*, *t* V, uti ſupra; non eſt dubium, quin ſicuti lineæ R L, *r l* exprimerent velocitates, quibus ipſæ percurruntur (5.), ſic etiam lineæ R T, *r t* exprimant velocitates tangentiales, quas corpus habet in punctis *R*, & *r*; lineæ vero R *u*, *r* V velocitates initiales a vi centripeta ortas.

34. Si vis centripeta per univerſum curvæ tractum perpetuo dirigatur verſus idem punctum F, dicitur punctum F centrum virium. Fingi ſolet hoc centrum perpetuo trahere ad ſe corpus; hinc oriri vim centripetam. Quamquam vis centripeta ubique fere a nobis conſiderabitur, uti vis quæpiam urgens perpetuo corpus verſus centrum, undecumque tandem oriatur.

35. Quoniam vero quæ infra quærenda ſunt, a velocitatibus tantum pendent, quod erit legentibus manifeſtum; idcirco virium nomine. velocitates tantum ipſas intelligemus, eritque jam nobis vis centri-

tri-

Digitized by Google

tripeta nihil aliud, niſi velocitas ipſa initialis a vi centripeta orta.

36. Quod ſi duæ rectæ ducantur F R, F P abſcindentes in curva arcum quemvis R P, ſpatium R F P appellabitur area, quam corpus eo tempore dicetur deſcribere, quo tempore percurrit arcum R P. His definitionibus præmiſſis theoremata quatuor, quorum maximus uſus eſt, exſequamur.

37. *Th.* I. Volvatur corpus per curvam R P, (*Fig.* 5.) ſitque F centrum virium. Sume arcum quemvis infiniteſimum R L, eum tamen, qui certo tempuſculo percurratur. Duc L Q perpendicularem ad F R, tum F T perpendicularem ad tangentem R T. Velocitas, qua corpus percurrit arcum R L, ponatur $= u$. Dico eſſe $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$.

Dem. Cum ſit angulus L R T infiniteſimus, haberi poſſunt pro æqualibus anguli L R Q, T R F. Quo ſtatim apparet, triangula etiam F R T, R L Q pro ſimilibus haberi poſſe, eſſeque $FR : FT :: RL : LQ$, ergo $LQ = \frac{FT \times RL}{RF}$. Atqui arcus R L [quoniam, ubivis ſumatur, certo ſemper tempuſculo percurritur] exprimit velocitatem u (5); ergo $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$.

38. *Th. II.* Volvatur corpus per curvam quamlibet A Q, (*Fig.* 7.) ſitque F centrum virium. Dico, duas quaivis areas A F P, A F Q proportionales eſſe tem-

poribus, quibus deſcribuntur.

Id manifeſtum per ſe erit, ſi prius oſtendatur, areolas deinceps duas infiniteſimas A F R, R F L, quæ æquales quidem ſint, æqualibus deſcribi tempuſculis. Id ergo oſtendamus.

Ducatur L T parallela lineæ R F, ſecans A R productam in T, compleaturque parallelogrammum T *u*. Hic jam vides eſſe R *u* vim centripetam, R T vim tangentialem, atque his duabus componi vim, qua corpus fertur per R L (32.)

Ducatur nunc F T. Quo facto apparet ſtatim, triangula R F T; R F L æqualia eſſe; habent enim eamdem baſim R F, ſuntque inter eaſdem parallelas L T, R F. Quare cum triangulum R F T æquale ſit areæ R F L, atque area R F L poſita ſit æqualis areæ A F R; erunt triangula R F T, A F R æqualia, & baſes A R, R T æquales.

His poſitis ſic colligo. Vis tangentialis eſt illa ipſa vis, qua corpus fertur per A R, quaque nititur excurrere per R T. Quare cum ſit R T = A R, tempus, quo corpus vi tangentiali percurreret R T, æquale eſt tempori, quo revera percurrit A R; atqui tempus, quo percurreret R T, æquale eſt etiam tempori, quo percurrit R L (13.); ergo A R, & R L percurruntur æquali tempore: ergo areolæ A F R, R F L æqualibus tempuſculis deſcribuntur. Quod oſtendendum ſuſceperam.

Nunc jam theorema propoſitum ſic expedio. Quanto plures areolas A F R continebit area A F Q

quam area A F P, tanto etiam pluribus tempuſculis deſcribetur. Ergo erunt areæ A F Q, A F P proportionales temporibus, quibus deſcribuntur. Q. e. d.

39. Licet etiam theorema ſic convertere. Si areæ omnes, terminatæ in eodem puncto F, proportionales ſint temporibus, quibus deſcribuntur, vis centripeta erit ubique directa ad idem punctum F.

Sint enim areæ duæ infiniteſimæ A F R, R F L æquales; ideoque arcus A R, R L æqualibus tempuſculis percurrantur. Producatur A R in T, ut ſit R T = A R; ducaturque L T. Facile intelligis, lineam R T exprimere vim tangentialem, lineam R L exprimere vim, qua corpus ex R in L fertur, ideoque eſſe T L parallelam directioni, quam vis centripeta habet in R. Præterea triangula duo R F T, R F L ſunt æqualia (quippe utrumque, ut facile conſtat, æquale eſt triangulo A F R). & inſiſtunt eadem baſi R F; oportet ergo lineam T L, vertices jungentem, parallelam eſſe etiam lineæ R F. Cum ergo T L ſit parallela tum lineæ R F, tum directioni vis centripetæ in R, coincidet hæc cum R F, tendetque ad punctum F.

40. *Tb. III.* Volvantur duo corpora per duas quaſvis curvas R P, *r p*, (*Fig.* 5. 6) ac ſint centra virium F. *f*. Sint arcus duo quivis infiniteſimi R L, *r l*, qui æquali tempore percurrantur, compleanturque areæ R F L, *r f l*; ac tandem ducantur F T, *f t* perpendiculares tangentibus R T, *r t*. Dico, velocitatem corporis in R eſſe ad velocitatem corporis in *r*, uti

eſt

eſt area R F L diviſa per F T ad aream rfl diviſam per ft.

Antequam id demonſtro, placet hoc animadvertere. Propter infinitam parvitatem angulorum L R T, lrt haberi poſſunt triangula R F L, rfl tamquam inſiſtentia tangentibus ipſis R T, rt; ideoque etiam lineæ F T, ft haberi poterunt tamquam ipſorum altitudines. Hoc permiſſo ſic rem demonſtro.

Quoniam R L, & rl percurruntur æquali tempore, erit velocitas in R ad velocitatem in r, uti R L ad rl (5.) Atqui eſt $RL = \frac{RFL}{FT}$, & $rl = \frac{rfl}{ft}$ (eſt enim baſis cujuſvis trianguli æqualis triangulo ipſi diviſo per altitudinem). Ergo velocitas in R ad velocitatem in r, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$. Q. e. d.

41. Neque id minus tenet, ſi puncta R, & r, ideoque etiam arcus R L, rl, æquali tempuſculo confecti, in eadem curva ſumantur. Valet enim in eadem curva ratio eadem. Et quoniam in eadem curva area R F L eſt conſtans, quippe quia arcum R L eum ſemper ſumi volumus, qui æquali tempuſculo conficiatur (38.), poni poterit $RFL = 1$, eritque velocitas in quovis puncto $R = \frac{1}{FT}$.

42. *Tb. IV.* Volvantur duo corpora per duas quaslibet curvas P V, pu, (*Fig.* 8. 9.) ſintque centra virium F, f. Sumantur duo quivis arcus P V, pu, compleanturque areæ P F V, pfu. Sumantur præterea arcus R L, rl, qui æquali tempore T percurrantur,

 com-

compleanturque etiam areæ R F L, rfl. Dico, tempus, quo percurritur arcus P V, eſſe ad tempus, quo percurritur arcus pu, uti eſt area P F V diviſa per aream R F L ad aream pfu diviſam per aream rfl.

Dem. In curva P V eſt utique area R F L ad aream P F V, uti tempus T ad tempus, quo percurritur arcus P V (38): ergo tempus, quo percurritur arcus P V, erit $= \frac{PFV \times T}{RFL}$. Similiter in curva pu invenies tempus, quo percurritur arcus pu, eſſe $= \frac{pfu \times T}{rfl}$. Eſt ergo illud tempus ad hoc, uti $\frac{PFV \times T}{RFL}$ ad $\frac{pfu \times T}{rfl}$, nempe uti $\frac{PFV}{RFL}$ ad $\frac{pfu}{rfl}$. Q. e. d.

43. Antequam huic capiti finem pono, placet ea breviter recenſere, quæ curvam determinant a corpore percurrendam. Sit corpus in R, [*Fig.* 10.] ac centrum virium ſit F. Determinata vi centripeta, ejuſque directione verſus F; ſi determinata etiam ſit vis projectionis, ejuſque directio R T, cogetur ſane corpus diſcedere a puncto R, determinatamque directionem R L ingredi, quam, niſi quid aliud ſuperveniat, perpetuo ſequatur. Verum ſupervenit ſtatim attractio nova centri F, quæ ipſum cogit directionem acceptam mutare, atque aliam L Q ingredi. Hujus autem novæ attractionis cum vis tum directio determinantur ex ipſo ſitu, & diſtantia centri F, atque ex ipſa attractionis lege; quæ determinata ſi fuerint, determinata erit etiam in corpore directio-

nis

nis mutatio. Hoc modo progredietur corpus perpetuas habens determinataſque directionis mutationes, atque idcirco determinatam curvam percurret.

44. Quæ ergo curvam percurrendam determinant, hæc ſunt. Vis centripeta, & vis projectionis, earumque directiones; deinde centri diſtantia, & attractionis lex. Quæ ſi eadem maneant omnia, eadem quoque curva a corpore percurrenda erit. Quamquam ſi horum unum mutetur, modo & aliorum conveniens mutatio fiat, eamdem adhuc curvam percurrere corpus poterit. Nihil enim impedit, quominus datam curvam quamlibet poſſit corpus percurrere, quantacumque ſit vis centripeta, qua trahitur e puncto R verſus F. Cur enim dum trahitur verſus F, quantacumque trahatur vi, nequeat etiam ſic projici, ut vi compoſita datæ curvæ laterculum ineat? Ubi id peregerit, cur ſuperveniens ſtatim attractio nova centri F non ea eſſe poſſit, ut corpus in aliud, quod proxime ſequatur, datæ curvæ laterculum ſe immittat; ac ſic deinceps ad latercula alia, atque alia ex certa attractionis lege tranſeat, omneſque accipiat datæ curvæ directiones? Sed jam de his ſatis.

CA-

CAPUT II.

De revolutione corporis per circulum vi centripeta ad circuli centrum tendente.

VIres centrales in ſectionibus conicis explicare ingrediens, exordiar a circulo, quippe qui ſectionum conicarum ſimpliciſſimus eſſe creditur.

45 Volvatur corpus per circulum A B (*Fig.* 11.) vi centripeta tendente ad circuli centrum C. Dico, velocitatem, qua per circulum volvitur, eſſe conſtantem.

Dem. Percurrat corpus duos quoſvis arcus A D, A E, compleanturque areæ A C D, A C E. His poſitis ſic colligo. Arcus A D, A E ſunt uti areæ A C D, A C E; atqui hæ areæ ſunt uti tempora, quibus arcus A D, A E percurruntur (38); ergo arcus A D, A E ſunt uti tempora, quibus percurruntur; ergo velocitas in utroque arcu eadem (*6.*); ergo conſtans.

Idem aliter. Velocitas in quovis curve puncto eſt $\frac{1}{p\,1}$ (41.), ideſt unitas diviſa per eam perpendicularem, quæ a centro ad puncti tangentem ducitur; quæ perpendicularis in circulo radius eſt. Atqui unitas diviſa per radium conſtans eſt: ergo & velocitas.

46. Volvatur corpus per circulum R H (*Fig.* 12.) vi centripeta tendente ad circuli centrum F. Dico, vim

vim centripetam exprimi tertia proportionali poſt diametrum, & velocitatem, qua corpus per circulum volvitur.

Dem. Sit arcus infiniteſimus R L, quem corpus percurrat certo tempuſculo, ducaturque L *u* parallela tangenti R T, ſecans diametrum R H in *u*; exprimet ſane arcus R L velocitatem, qua corpus per circulum volvitur; lineola R *u* vim centripetam (32.). Atqui eſt R *u* tertia proportionalis poſt diametrum R H, & arcum R L. Ergo vis centripeta exprimitur tertia proportionali poſt diametrum, & velocitatem, qua corpus per circulum volvitur.

47. Erit ergo vis centripeta quadratum velocitatis, qua corpus per circulum volvitur, diviſum per diametrum. Sit vis centripeta $=$ G. Velocitas, qua corpus per circulum volvitur, $=$ V; diameter $=$ D; erit $G = \frac{VV}{D}$.

48. Hinc patet, vim centripetam G in tota corporis revolutione conſtantem eſſe; eſt enim conſtans velocitas V (45.), neque minus conſtans eſt diameter D.

49. Patet etiam, velocitatem, qua corpus per circulum volvitur, eſſe radicem vis centripetæ ductæ in diametrum. Si eſt enim, ut modo diximus, $G = \frac{VV}{D}$, erit etiam $V = \sqrt{DG}$.

50. Porro tempus periodicum erit radix diametri diviſæ per vim centripetam. Nam tempus perio-

di-

dicum eſt utique circumferentia ipſa, cui ſubſtituere diametrum D poſſumus, diviſa per velocitatem (4.). Eſt ergo tempus periodicum $= \frac{D}{\sqrt{DG}} = \sqrt{\frac{D}{G}}$.

51. *Problema*. Volvatur corpus per circulum A B (*Fig.* 13.) vi centripeta tendente ad circuli centrum C. Fingatur jam cadere verſus C e quovis circumferentiæ puncto A, ea vi centripeta, quam habet in circulo, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, qua per circulum volvitur.

Sit diameter $= D$. Velocitas, qua corpus per circulum volvitur, $= V$. Erit vis centripeta $= \frac{VV}{D}$ (47.). Sit jam $AD = x$. Quoniam velocitas, quam corpus, cadendo ex A, obtinet in D, æqualis eſt duabus radicibus ſpatii ipſius A D ducti in vim centripetam (29.), erit velocitas in $D = 2\sqrt{\frac{VVx}{D}}$.

Pone ergo æquationem $2\sqrt{\frac{VVx}{D}} = V$. Exſiſtet hinc $x\ (AD) = \frac{D}{4}$. Quæ quarta pars diametri eſt. Q. e. i.

52. Iiſdem poſitis. Tempus periodicum eſt ad tempus, quo corpus cadit ex A in D, uti circumferentia ad radium.

Dem. Sit circumferentia $= C$. Erit tempus periodicum $= \frac{C}{V}$ (4.). Tempus, quo corpus cadit ex A in

A in D, eſt (27.) radix ſpatii ipſius A D diviſi per vim centripetam. Eſt autem, ut modo oſtendimus, ſpatium $AD = \frac{D}{4}$; vis centripeta $= \frac{VV}{D}$. Erit ergo tempus, quo corpus cadit ex A in D, $= \frac{D}{2V}$. Hic ſtatim vides, eſſe $\frac{C}{V} : \frac{D}{2V} :: C : \frac{D}{2}$, nempe tempus periodicum eſſe ad tempus, quo corpus cadit ex A in D, uti eſt circumferentia ad radium. Q. e. d.

53. Volvantur duo corpora per duos circulos A B, *a b* (*Fig.* 14. 15.) viribus centripetis tendentibus ad centra C, *c*. Si vires centripetæ reciproce proportionales ſint quadratis diſtantiarum C A, *c a*, ſive diametrorum A B, *a b*, dico quadrata temporum periodicorum eſſe proportionalia cubis diametrorum.

Demonſtratio ſine ullo artificio vel minus attentis ſe prodit. Sit in circulo A B diameter $AB = D$. Vis centripeta $= G$. Erit tempus periodicum $= \sqrt{\frac{D}{G}}$ (50.), cujus quadratum $= \frac{D}{G}$. Sit in circulo *a b* diameter $ab = d$. Quoniam volumus vires centripetas eſſe reciproce proportionales quadratis diametrorum, erit in circulo *a b* vis centripeta $= \frac{DD \times G}{dd}$. Tempus periodicum $= \sqrt{\frac{d^3}{DD \times G}}$ (50.), cujus qua-

Digitized by Google

dratum $= \frac{d^3}{DD \times G}$. Statim vides eſſe $\frac{D}{G} : \frac{d^3}{DD \times G} :: D^3 : d^3$, ideſt quadrata temporum periodicorum proportionalia eſſe cubis diametrorum. Q. e. d.

54. Volvantur duo corpora per duos circulos A B, *a b* viribus centripetis tendentibus ad centra C, *c*. Si quadrata temporum periodicorum fuerint proportionalia cubis diametrorum, dico, vires centripetas eſſe reciproce proportionales quadratis diſtantiarum C A, *c a*, ſive diametrorum A B, *a b*.

Hic quoque inutile ſit artificia quærere. Sit in circulo A B diameter $AB = D$. Tempus periodicum $= T$. Quoniam velocitas, qua corpus per circulum volvitur, æqualis eſt circumferentiæ, ſeu diametro, diviſæ per tempus (2.), erit in circulo A B velocitas $= \frac{D}{T}$. Et quia vis centripeta æqualis eſt quadrato velocitatis diviſo per diametrum [47.] erit in circulo A B vis centripeta $= \frac{D}{TT}$. Jam vero in circulo *a b* ſit diameter $ab = d$. Quoniam volumus, quadrata temporum periodicorum proportionalia eſſe diametrorum cubis, erit in circulo *a b* tempus periodicum $= \sqrt{\frac{d^3 \times TT}{D^3}}$. Eamdem porro viam inſiſtens, quam modo in circulo A B tenuimus, invenies in circulo *a b* vim centripetam $= \frac{D^3}{dd \times TT}$. Ac jam vides eſſe $\frac{D}{TT} : \frac{D^3}{dd \times TT} :: dd : DD$, ideſt vires centripe-

tas

tas reciproce proportionales eſſe quadratis diametrorum. Q. e. d.

55. Volvatur corpus per circulum A B (*Fig.* 14) ex attractione maſſæ M in centro ipſo C inſidentis. Dico, maſſam M proportionalem eſſe cubo diametri, ſive radii, diviſo per quadratum temporis periodici. Sit diameter $= D$. Tempus $= T$. Dico eſſe $M = \frac{D^3}{TT}$.

Dem. Velocitas initialis, quam parit attractio, eſt maſſa M diviſa per quadratum diſtantiæ (19.), cui diſtantiæ ſubſtituere poſſumus diametrum ipſam D; eſt ergo velocitas initialis $= \frac{M}{DD}$. Eſt etiam velocitas initialis $= \frac{VV}{D}$ (47.); quare cum velocitas V æqualis ſit circumferentiæ, cui diametrum D poſſumus ſubſtituere, diviſæ per tempus periodicum T, ideoque ſit $V = \frac{D}{T}$, & $VV = \frac{DD}{TT}$; erit jam velocitas initialis $\frac{VV}{D} = \frac{D}{TT}$. Pone ergo æquationem $\frac{M}{DD} = \frac{D}{TT}$. Exſiſtet $M = \frac{D^3}{TT}$. Q. e. d.

56. *Problema*. Dato tempore periodico, quo corpus volvitur per datum circulum A B (*Fig.* 13.) vi centripeta tendente ad centrum C, invenire proportionem, quam habet vis ejus centripeta ad communem terreſtrium corporum gravitatem.

Ut eſt circumferentia ad radium, ita ſit tempus

periodicum datum ad tempus aliud K. Experimentales phyſici te docebunt, quam lineam percurrat terreſtre corpus a quiete diſcedens, ac cadens libere tempore conſtituto K. Sit ea linea PQ. Sit præterea AD quarta pars diametri AB. Dico, vim centripetam corporis per circulum AB ſe volventis eſſe ad communem terreſtrium corporum gravitatem, uti AD ad PQ.

Dem. Quoniam ponitur circumferentia ad radium, uti tempus periodicum ad tempus K, ſequitur, ut, ſi corpus cadat libere ex A, vi centripeta, quam habet in A, ipſum conſtanter urgente, conficiat lineam AD tempore K (52.). Jam vero eodem tempore K terreſtre corpus cadens libere conficit lineam PQ; gravitates vero ſunt uti ſpatia eodem tempore percurſa (25); ergo vis centripeta corporis ſe volventis per circulum AB eſt ad communem terreſtrium corporum gravitatem, uti AD ad PQ.

Hæc habui dicere de revolutione corporis per circulum, in quibus exerceri te paululum volo, Torquate ſuaviſſime, ſic ut eadem demonſtres aliter, multiſque modis verſes, & alia addas, ut in mentem venient. Sic enim & quæ adhuc te docui, breviora ipſe facies, atque elegantiora, & ad ea, quæ infra tradentur, paratior accedes.

CA-

Digitized by Google

CAPUT III.

De revolutione corporis per ellipſim vi centripeta ad focum tendente.

Lemmata quædam e geometria petita.

Circulum ellipſis excipiat, quæ illi eſt ſectionum conicarum omnium quamproxima; qua in curva centrales vires difficiliores paulo eſſe exiſtimantur, atque obſcuriores. Ego illas breviter explanare nitar, & dilucide quantum potero.

Sed antequam revolutionem corporis explico, volo te, Varene ſuaviſſime, pauca quædam, quæ quaſi lemmata infra aſſumam, e geometria nunc repetere, ne poſtea rem mechanicam tractanti in geometrica hærendum ſit. Quæ autem demonſtrata ab aliis ſunt, ea tantum indicabo; quod nuſquam alibi demonſtratum eſſe arbitror, id ipſe curabo, ut demonſtrem.

57. Sit ellipſis A B, (*Fig.* 16.) cujus axis major A B, minor D E, centrum C, focus F. Parameter axis majoris ſit P. Hanc parametrum appellabo poſthac parametrum ellipſeos.

58. His poſitis, dico primum, lineam F D æqualem eſſe ſemiaxi C A. Imo ſi ſumto in ellipſi puncto quovis R, ducatur per C diameter R V, tum diameter conjugata M N, ac tandem linea F R ſecans

cans M N in G, erit etiam $GR = CA$.

59. Dico ſecundo, rectangulum ex C A & C D æquale eſſe parallelogrammo ex C R & C N, ſive C M; ideoque ducta R O perpendiculari ad M N, eſſe $CM : CA :: CD : RO$.

60. Quod ſi ponatur arcus R L infiniteſimus, iiſdemque poſitis, quæ ſupra poſuimus, ducatur L *u* parallela tangenti R T, ſecans lineam F R in *u*; tum linea L Q perpendicularis ad F R; dico eſſe $P : LQ :: LQ : Ru$, ideoque $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$.

Id facile oſtendes, ſi producta L *u*, donec ſecet diametrum R V in *x*, & perpendicularem R O in *z*, animadverteris, triangula duo R *u z*, L *u* Q ſimilia eſſe, eſſeque $Ru : Rz :: Lu : LQ$. Inventis enim *R z*, & L *u*, facile etiam intelliges quo modo ſe habeat L Q ad R *u*.

Quæramus igitur primum R *z*. Cum ſit axis major $= 2\,CA$, parameter vero P, erit axis minor $= \sqrt{P \times 2\,CA}$, & $CD = \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}$. Eſt autem $CM : CA :: CD : RO$ (59). Erit igitur $RO = \frac{CA \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$. Atqui propter ſimilitudinem triangulorum R G O, R *u z*, eſt R G, ſive C A (58.) $: RO :: Ru : Rz$. Ergo $Rz = \frac{Ru \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$.

Quæ-

Quæramus jam L u. Primum propter ſimilitudinem triangulorum R O C, R z x, eſt R O : R C : : R z : R x. Hic pro R O, & R z ſubſtitue valores ſupra inventos, ac ſtatim habebis $Rx = \frac{RC \times Ru}{CA}$. Denique cum poſſit L u confundi cum L x ordinata ad diametrum R V, eſt enim $u\,x$ differentia infiniteſima ſecundi ordinis [30.] erit ex ellipſeos natura $\overline{CR}^2$ ad $\overline{CM}^2$, uti $Vx \times Rx$, ſive $2\,CR \times Rx$, ad $\overline{Lu}^2$. Jam vero ſi pro R x ſubſtitues valorem ejus modo inventum, erit tibi ſtatim $Lu = CM\sqrt{\frac{2\,Ru}{CA}}$.

Lineis R z, L u ſic inventis, cum ſit, ut initio dixi; R u : R z : : L u : L Q, invenies ſtatim $LQ = \sqrt{P \times Ru}$, unde $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Q. e. d.

De revolutione corporis per ellipſim.

16. Volvatur corpus per ellipſim A B (*Fig.* 17.) vi centripeta tendente ad focum F, ſitque parameter ellipſeos = P. Sume arcum quemvis infiniteſimum R L, quem corpus certo, conſtitutoque tempuſculo percurrat. deinde duc L Q perpendicularem ad F R, & F T perpendicularem tangenti R T.

Dico, vim centripetam, quam corpus habet in R,

Digitized by Google

R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac ſi velocitas, quam corpus habet in R, ſit $= u$, exprimi vim centripetam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonſtro primam partem. Ducatur L*u* parallela tangenti RT, ſecans FR in *u*. Exprimet ſane R*u* vim centripetam, quam habet corpus in R (32). Atqui eſt $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (60). Ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ vim centripetam exprimit. Q. e. d.

Demonſtro partem alteram. Vis centripeta in R exprimitur, ut modo oſtendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Atqui eſt

$LQ = \frac{FT \times u}{FR}$ (37), ideoque $LQ^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2}$.

Ergo vis centripeta in R exprimitur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$. Q. e. d.

62. His viſis dico vim centripetam in quovis puncto R ejuſdem ellipſeos eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ a foco F, nempe eſſe $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum RL, ubicumque ſit, eum ſemper eſſe, qui æquali tempore percurratur, erit area RFL perpetuo æqualis (38). Sit er-

Digitized by Google

ergo area R F L $= 1$. Atqui eſt L Q proportionalis areæ R F L diviſæ per F R (eſt enim altitudo cujuſvis trianguli proportionalis triangulo ipſi diviſo per baſim); ergo $LQ = \frac{1}{FR}$, & $\overline{LQ}^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Eſt autem vis centripeta $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (61.). Erit igitur vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Et quoniam in eadem ellipſi eſt P conſtans, ideoque e formula expungi poteſt, erit tandem vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

Idem aliter. Eſt vis centripeta $= \frac{FT^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (61); atqui eſt $u = \frac{1}{FT}$ (41.), ideoque $uu = \frac{1}{\overline{FT}^2}$. Ergo vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Expunge conſtantem P. Erit vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

63. His rebus patet & vim centripetam, & velocitatem in ellipſi perpetuo variare; eſt enim vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (62.); velocitas $= \frac{1}{FT}$ (41.); quæ quantitates perpetuo variant.

64. Si corpus exſiſtat in vertice A, F T vertitur in F A; ſi in vertice B, in F B. Velocitas ergo

vim centtipetam in b, uti $\frac{1}{\overline{FR}^2}$ ad $\frac{1}{\overline{fb}^2}$. Q. e. d.

67. Volvantur duo corpora per duas ellipſes A B, $a\,b$ (*Fig.* 20. 21.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Sint parametri P, p. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, f. His poſitis, ſumantur duo quævis puncta R, & r, ducanturque FT, ft perpendiculares tangentibus RT, rt. Dico, velocitatem in R eſſe ad velocitatem in r, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$.

Dem. Sit velocitas in $R = V$; in r, $= u$. Erit vis centripeta in $R = \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (61). Et quoniam ſupponimus, vires centripetas, promiſcue ſumtas, eſſe reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis, habebimus etiam vim centripetam in $R = \frac{1}{\overline{FR}^2}$; in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas; $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æquatione elicies $V = \frac{\sqrt{P}}{FT}$; ex altera elicies $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo V [velocitas in R]

X 2 ad

Digitized by Google

ad u (velocitatem in r), uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d.

68. Erit ergo, in hujuſmodi ellipſibus, $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula, velocitatem exprimens in quovis puncto R.

69. Volvantur duo corpora per duas ellipſes A B, *a b* viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis ſumantur arcus duo infiniteſimi R L, *r l*, qui æquali tempore percurrantur, compleantur que areæ R F L, *rfl*. Dico, areas R F L, *rfl* eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis F T, *ft* perpendicularibus ad tangentes R T, *r t*, erit velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (40.), nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ [67.]. Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{ft} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo etiam $RFL : rfl :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

70. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus R L, *r l*, ideoque etiam areæ R F L, *rfl* aſſignabiles. Poterunt quippe tempora reſolvi in tempuſcula totidem inter ſe æqualia, tum areæ in areolas tempuſculis ſingulis reſpondentes; ac ſi ſingulas areolas cum ſingulis comparaveris, valebit in omnibus ratio eadem.

71.

71. Volvantur duo corpora per duas ellipſes A B, *a b* viribus centripetis tendentibus ad focos *F*, *f*, ſintque vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, quibus duæ quævis areæ P F V, *p f u* deſcribuntur, proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus R L, *r l* percurſi æquali tempore, compleanturque areæ R F L, *r f l*. Hoc poſito ſic colligo. Tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, *p f u*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas R F L, *r f l* (42.). Sed areæ R F L, *r f l* ſunt uti radices parametrorum (69.). Ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, *p f u*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

Coroll. Ergo tempora periodica proportionalia ſunt totis areis diviſis per parametrorum radices.

72. Volvatur corpus per ellipſim A B (*Fig.* 22.) vi centripeta tendente ad focum F. Sitque axis major A B, minor D E, centrum C, parameter P. Prætereà, centro F, radio F D, fiat circulus D S; fingamoſque, corpus volvi per D S vi centripeta tendente ad centrum F, atque hanc vim centripetam æqualem eſſe illi, quam corpus, per ellipſim ſe volvens, habet in ipſo puncto D. Quo loco licet obiter animadvertere, eamdem maſſam eſſe oportere, quæ ſedens in F attractione ſua continet corpus tum in ellipſi A B, tum in circulo D S; ſi enim duæ diverſæ maſſæ eſſent, non eamdem vim centripetam

pa-

parerent in eodem puncto D. Sed jam ad rem venio.

Dico primum, velocitatem, qua corpus volvitur per circulum DS, æqualem eſſe illi, quam, ſe volvens per ellipſim, habet in puncto D.

Dico ſecundo, tempus periodicum in circulo DS æquale eſſe tempori periodico in ellipſi AB.

Antequam hæc demonſtro, juvat animadvertere, ellipſim AB, & circulum DS revera duas ellipſes eſſe, in quibus vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, reciproce proportionales ſunt quadratis diſtantiarum; nam utique vires centripetæ tales ſunt in puncto communi D, quo fit, ut tales quoque eſſe debeant in punctis aliis quibuslibet (*66.*)

Demonſtro primam partem. Velocitas generatim eſt $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ (*68.*), ideſt radix parametri diviſa per eam perpendicularem, quæ a centro virium ad puncti tangentem ducitur. Videamus jam ergo quid ea ſit, tum in puncto D ellipſeos AB, tum in circulo DS. In ellipſi AB perpendicularis ducta a centro virium F ad tangentem puncti D eſt æqualis ſemiaxi CD, ideſt $= \frac{\sqrt{P \times AB}}{2}$. Ergo velocitas in puncto ellipſeos $D = \frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{P \times AB}} = \frac{2}{\sqrt{AB}}$. In circulo DS, cum ſit parameter æqualis diametro, ideſt $= 2FD = AB$ (58.); perpendicularis vero ducta a centro F ad

tan-

tangentem puncti D æqualis ſit radio ipſi $FD = \frac{AB}{2}$, ſequitur, ut velocitas in puncto circuli D, vel omnino in circulo D S, ſit $= \frac{2\sqrt{AB}}{AB} = \frac{2}{\sqrt{AB}}$. Quo ſtatim apparet, velocitates, quas dixi, æquales eſſe.

Demonſtro partem alteram. Tempus periodicum generatim eſt area totalis diviſa per radicem parametri (71.). Cum ergo ellipſeos area exprimatur rectangulo axium A B, D E, ſitque $DE = \sqrt{P \times AB}$, erit in ellipſi tempus periodicum $= \frac{AB\sqrt{P \times AB}}{\sqrt{P}} = \sqrt{\overline{AB}^3}$. Cum vero circuli D S area exprimatur quadrato diametri $2\,FD = AB$, ſitque parameter æqualis diametro ipſi A B, erit in circulo tempus periodicum $= \frac{\overline{AB}^2}{\sqrt{AB}} = \sqrt{\overline{AB}^3}$. Conſtat ergo, tempora periodica, quæ dixi, æqualia eſſe.

73. Volvantur duo corpora per duas ellipſes A B, *a b*, (*Fig.* 22. 23.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*.

Dico primum. Si vires centripetæ, in ambabus ellipſibus promiſcue ſumtæ, ſunt reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis, quadrata temporum periodicorum erunt proportionalia cubis axium A B, *a b*.

Dico ſecundo. Si quadrata temporum periodicorum ſunt proportionalia cubis axium A B, *a b*, vires

Digitized by Google

res centripetæ, in ambabus ellipſibus promiſcue ſumtæ, erunt reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis.

Ut hæc demonſtrem, ſint circuli duo D S, *d s*, per quos volvi fingamus duo corpora ita plane, uti antea ſuppoſuimus (72.). Hoc poſito.

Demonſtro primam partem. Cum vires centripetæ, in ellipſibus A B, *a b* promiſcue ſumtæ, ponantur reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a punctis F, *f*, facile intelligitur, eas tales eſſe etiam in circulis D S, d *s*. Quod cum ita ſit, jam in circulis D S, *d s* quadrata temporum periodicorum ſunt proportionalia cubis diametrorum (53.): atqui tempora periodica in circulis D S, *d s* æqualia ſunt temporibus periodicis in ellipſibus A B; *a b* (72.), & diametri circulorum D S, *d s* æquales ſunt ellipſium axibus A B, *a b*; ergo etiam in ellipſibus A B, *a b* quadrata temporum periodicorum ſunt proportionalia cubis axium A B, *a b*. Q. e. d.

Id ipſum vel ſupra intelligi potuit (72.), ubi tempus periodicum expreſſimus per $\sqrt{\overline{AB}^3}$. Ea quippe re intelligi ſatis potuit, quadratum ejus exprimi per $\overline{AB}^3$, ideſt per cubum axis.

Demonſtro partem alteram. Quoniam in ellipſibus A B, *a b* quadrata temporum periodicorum ponuntur proportionalia cubis axium A B, *a b*, erunt etiam in circulis D S, *d s* quadrata temporum periodicorum proportionalia cubis diametrorum. Erunt

er-

Digitized by Google

ergo in circulis D S , $d s$ vires centripetæ reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a centris F, f (54.). Quo facile intelligitur, tales eſſe debere vires centripetas promiſcue ſumtas etiam in ellipſibus A B , $a b$, quibuſcumque in punctis ſumantur. Sunt enim profecto tales in punctis D, d (66.)

Quæſitum. Dato tempore T, dataque area quavis I F G (*Fig.* 59.) quam tempore T deſcribit Cometa, quam aream vocabo R, dataque diſtantia perihelia B F invenire tempus periodicum cometæ.

In planeta cognito, puta in venere, inveniatur area, quam venus deſcribit tempore T, quam aream vocabo A. Ex modo dictis erit A ad R, uti radix parametri orbitæ veneris ad radicem parametri orbitæ cometæ, quam parametrum ponam $= 4 p$. Invento ſic parametro orbitæ cometæ ſumatur in F B pars $F r = q$, ac fiat $B r : B F :: B F : B A$, erit B A axis major orbitæ cometæ. Ac tempus periodicum cometæ, ex ante dictis, erit $\sqrt{\overline{A B}^3}$ comparandum cum tempore periodico veneris.

74. Volvantur duo corpora per duas ellipſes A B, $a b$, viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Dico, centrales maſſas inſidentes in focis F, f, quarum attractione continentur corpora in ellipſibus A B, $a b$, eſſe proportionales cubis axium A B, $a b$ diviſis per quadrata temporum periodicorum.

Ut id demonſtrem, ſint duo circuli D S, $d s$, per quos volvi fingamus duo corpora ita plane, uti

ſuppoſuimus ſupra (72.). Hoc poſito ſic colligo. Sunt utique in circulis D S, *d s* maſſæ centrales, quæ inſident in punctis F, *f*, proportionales cubis diametrorum diviſis per quadrata temporum periodicorum (55.). Atqui diametri circulorum D S, *d s* æquales ſunt axibus A B, *a b*; & tempora periodica in circulis D S, *d s* æqualia ſunt temporibus periodicis in ellipſibus A B, *a b* (72); eædemque ſunt centrales maſſæ, quæ continent corpora tum in ellipſibus, tum in circulis (72.). Ergo maſſæ centrales inſidentes in focis F, *f* proportionales ſunt cubis axium A B, *a b*, diviſis per quadrata temporum periodicorum. Q. e. d.

75. Quare ſi in ellipſibus A B, *a b* quadrata temporum periodicorum proportionalia ſunt cubis axium, oportebit ſane, maſſas centrales æquales eſſe. Nam utique cubi axium diviſi per quadrata temporum periodicorum in utraque ellipſi æquales erunt.

76. Problemate uno tractatiunculam hanc totam concludamus. Volvatur corpus per ellipſim A B (*Fig.* 24.) vi centripeta tendente ad focum F. Fingatur jam cadere e quovis ellipſeos puncto R verſus F, vi centripeta, quam habet in R, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum corpus cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam, ſe volvens per ellipſim, habet in puncto R.

Ducatur F T perpendicularis ad tangentem R T, ſitque parameter ellipſeos P. His poſitis, ſit veloci-

tas

tas corporis in $R = u$. Erit vis centripeta in eodem puncto $R = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{p \times \overline{FR}^2}$ (61.). Sit $RD = x$. Velocitas, quam corpus cadens obtinet in D, eſt æqualis duabus radicibus ſpatii ipſius R D ducti in vim centripetam (29.). Ergo erit velocitas in $D = 2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{p \times \overline{FR}^2}}$. Pone igitur æquationem $2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{p \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc x (R D) $= \frac{p \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. Nempe quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

Et quoniam quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri ubique eſt minor, quam R F, idcirco corpus cadens a puncto R propoſitam velocitatem acquirit prius quam ad focum perveniat.

77. Quod ſi punctum R conſtitutum ſit in ipſo vertice A, quoniam ibi F T vertitur in F R, erit $RD = \frac{p \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2} = \frac{p}{4}$. Hæc adhuc de corporis revolutione per ellipſim.

CAPUT VI.

De revolutione corporis vel per parabolam, vel per hyperbolam vi centripeta ad focum tendente.

MIraberis fortaſſe, mi Torquate, quod cum de ellipſi, ſatis, ut mihi videor, diligenter, ſupra egerim, nunc de parabola, atque hyperbola ſeorſim agere inſtituam. Quæ enim in duabus his curvis occurrunt, quod per te ipſe facile intelliges, eadem fere ſunt, quæ in ellipſi, eodemque fere modo demonſtrantur; itaque ſi te ſuperiori capite monuiſſem, ut quæ legeres, eadem ad ellipſim primum, tum ad parabolam, deinde ad hyperbolam accommodares, videbor facile e duobus capitibus unum facere potuiſſe, ac breviorem librum contexere. Potuiſſem etiam generalibus uti formulis, quæ in ſectiones omnes convenirent, quæque ad brevitatem videntur factæ. Atque has ego quidem adhibuiſſem, ſi tantum in eis conſiderem, quantum hi ſolent, qui illas adhibent. Ego vero ſic ſentio, generales illas formulas ad rerum perceptarum memoriam tuendam valere quidem plurimum, ad res ipſas percipiendas non admodum; quas res profecto numquam ſatis perceptas habeas, niſi unamquamque prius accurate definiveris, & in ſuas partes diſtinxeris, ac demum partes ſingulas ſeorſim inſpexeris, ac diligenter ſcrutatus fueris. Porro ex hac inſpectione ducuntur plerumque formulæ,

vel

Digitized by Google

vel certe manifeſtiores fiunt. Neque vero longiorem me fore exiſtimavi, ſi hæc ſcribere ingreſſus, ubi de ellipſi ſeparatim diſſeruiſſem, parabolæ deinde, atque hyperbolæ caput proprium tribuiſſem. Non enim, puto, plus temporis inſumes, caput hoc legens, quam ſi, ſuperius cum legeres, hærere in locis ſingulis debuiſſes, eademque modo ad parabolam, modo ad hyperbolam per te ipſe transferre. Ego vero breviorem librum, non eum judico, qui paucioribus paginis contineatur, ſed eum, in quo legendo, intelligendoque minus temporis ſit inſumendum. Itaque ea mihi ſemper videntur ſcribi breviter, quæ perſpicue ſcribuntur. Habes, Torquate, conſilii noſtri rationem. Nunc ad rem ipſam veniamus.

De revolutione corporis per parabolam vi centripeta ad focum tendente.

Lemmata quædam e geometria petita.

78. Sit parabola quævis A R, (*Fig.* 25.) vertex A, focus F; parameter axis primarii, ſit P. Hanc parametrum appellabo poſthac parametrum parabolæ.

Sume in ea punctum quodvis R. Duc F R, deinde F T perpendicularem ad tangentem R T, ac tandem diametrum R D. Dico, parametrum para-

bo-

Digitized by Google

bolæ P eſſe $= \frac{4 \overline{FT}^2}{FR}$. Dico etiam parametrum diametri R D eſſe $= 4$ F R. Quod ſi duxeris lineam *u z* parallelam tangenti R T, quæ ſecet F R in *u*, R D in *z*, erit R *u* = R *z*. Quæ omnia facillima demonſtratu ſunt.

79. Iiſdem poſitis, ſit arcus L R infiniteſimus. Ducatur L *z* parallela tangenti R T, ſecanſque F R in *u*, R D in *z*. Tandem ducatur L Q perpendicularis ad F R. Dico eſſe P : L Q : : L Q : R *u*, ideoque R *u* $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$.

Dem. Cum ſit L *z* ordinata ad diametrum R D, reſpondens abſciſſæ R *z*; ſitque diametri R D parameter $= 4$ F R (78.), erit L *z* $= \sqrt{4 FR \times Rz}$. Ac cum poſſit L *z* confundi cum L *u*; eſt enim *u z* infiniteſima ſecundi ordinis (30.); ſitque R *z* = R *u* (78.), erit L *u* $= \sqrt{4 FR . Ru}$. Hoc poſito ſic colligo. Propter ſimilitudinem triangulorum F R T, L *u* Q eſt F R : F T : : L *u* : L Q. Ergo F R × L Q = F T $\sqrt{4 FR \times Ru}$. Ergo F R × L Q² = 4 F T² × R *u*, & L Q² $= \frac{4 FT^2}{FR} \times Ru$. Atqui $\frac{4 FT^2}{FR} = P$ (78.). Ergo L Q² = P × R *u*, & tandem R *u* $= \frac{LQ^2}{P}$. Q. e. d.

De

80. V Olvatur corpus per parabolam A R (*Fig.26.*) vi centripeta tendente ad focum F, ſitque parameter $= P$. Sume arcum quemvis infiniteſimum R L quem corpus certo tempuſculo percurrat; duc deinde L Q perpendicularem ad F R; tum F T perpendicularem tangenti R T.

Dico vim centripetam, quam corpus habet in R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac ſi velocitas, quam corpus habet in R, ſit $= u$, exprimi vim centripetam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonſtro primam partem. Ducatur L *u* parallela tangenti R T, ſecans F R in *u*. Exprimet ſane R *u* vim centripetam, quam habet corpus in R (32.): atqui eſt $R u = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (79); ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ vim centripetam exprimit. Q. e. d.

Demonſtro partem alteram. Vis centripeta in R exprimitur, ut modo oſtendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; atqui eſt

$$LQ = \frac{FT \times u}{FR} \text{ (37), ideoque } LQ^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2},$$

ergo

ergo vis centripeta in R exprimetur etam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$. Q. e. d.

81. His viſis dico vim centripetam in quovis puncto R ejuſdem parabolæ eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ a foco F, nempe eſſe $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum R L, ubicumque ſit, eum ſemper eſſe, qui æquali tempore percurratur, erit area R F L perpetuo æqualis (38.). Sit ergo area R F L $= 1$. Atqui eſt L Q proportionalis areæ R F L diviſæ per F R. Ergo L Q $= \frac{1}{FR}$, & L Q$^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Eſt autem vis centripeta $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (80.). Erit igitur vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Et quoniam in eadem parabola eſt P conſtans, ideoque e formula expungi poteſt, erit tandem vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

82. Satis jam conſtat & vim centripetam, & velocitatem in parabola perpetuo variare; eſt enim vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (81.) velocitas $= \frac{1}{FT}$ (41.), quæ quantitates perpetuo variant. Nunc jam revolutio-

nes corporum per duas diverſas parabolas conſideremus.

83. Volvantur duo corpora per duas parabolas A R, *a r*, (*Fig.* 27. 28.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis ſumantur duo quævis puncta R, *r*, ducanturque F T, *f t* perpendiculares tangentibus R T, *r t*. Dico, velocitatem in R eſſe ad velocitatem in *r*, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$.

Dem. Sit velocitas in R $=$ V; in $r = u$. Erit vis centripeta in R $= \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (80.). Erit etiam, uti nunc ſupponimus, vis centripeta in R $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$; in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æquatione elicies $V = \frac{\sqrt{P}}{FT}$, ex altera elicies $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo V (velocitas in R) ad *u* (velocitatem in *r*), uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$; Q. e. d.

84. Erit ergo, in hujuſmodi parabolis, $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ge-

neralis formula velocitatem exprimens in quovis puncto R.

85. Volvantur duo corpora per duas parabolas A R, ar viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Sint parametri P, p. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, f. His poſitis ſumantur arcus duo infiniteſimi R L, rl, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleantnrque areæ R F L, rfl. Dico areas R F L, rfl eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis F T, ft perpendicularibus ad tangentes R T, rt, erit velocitas in R ad velocitatem in r, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (40.); nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ (83.). Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo etiam $RFL : rfl :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

86. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus R L, rl, ideoque etiam areæ R F L, rfl aſſignabiles. Quod facile intelliges, ſi ambo tempora in tempuſcula totidem reſolvas inter ſe æqualia, tum areas in areolas ipſis reſpondentes.

87. Volvantur duo corpora per duas parabolas A R, ar, (*Fig.* 29. 30.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, f, ſintque vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, qũibus duæ quævis

vis areæ P F V, pfu deſcribuntur, proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus R L, $r\,l$ percurſi æquali tempore, compleanturque areæ R F L, rfl. Hoc facto ſic colligo. Tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, pfu, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas R F L, rfl (42.). Sed areæ R F L, rfl ſunt uti radices parametrorum (85.). Ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, pfu, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

88. *Problema*. Volvatur corpus per parabolam A R (*Fig.* 31.) vi centripeta tendente ad focum F. Puta jam ipſum cadere e quovis parabolæ puncto R verſus F, vi centripeta, quam habet in R, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum corpus cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam, ſe volvens per parabolam, habet in puncto R.

Ducatur F T perpendicularis ad tangentem R T, ſit que parameter parabolæ $=$ P. His poſitis, ſit velocitas in puncto R $= u$. Erit vis centripeta in eodem puncto R $= \dfrac{\overline{FT}^2 \times \overline{uu}}{P \times \overline{FR}^2}$ (80.). Sit R D $= x$. Velocitas, quam corpus cadens obtinet in D, eſt æqualis duabus radicibus ſpatii ipſius R D ducti in vim centripetam (29.). Erit ergo velocitas in D $=$

$2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}}$, Pone igitur æquationem

$2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc x (R D) $=$

$\frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. Nempe quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

Quoniam hæc quarta proportionalis ubique æqualis eſt ipſi R F, idcirco corpus cadens, e quocumque parabolæ puncto cadat, tum demum velocitatem quæſitam obtinet, cum ad focum pervenit.

89. Quod ſi punctum R conſtitutum ſit in ipſo vertice A, quoniam ibi F T vertitur in F R, erit

$RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2} = \frac{P}{4}$.

De

De revolutione corporis per hyperbolam vi centripeta ad focum tendente.

Lemmata quædam e geometria petita.

90. Sit hyperbola A R. (*Fig.* 32.) Vertex A. Centrum C. Semiaxis primus C A; ſemiaxis ſecundus C D. Parameter axis primi ſit P. Hanc parametrum vocabo poſthac parametrum hyperbolæ. Focus interior ſit F, qui nempe intra concavum hyperbolæ eſt; nam alterum, ſi quando indicare oportuerit, exteriorem vocabo.

91. Sumto in ea quovis puncto R, ducatur C R ſemidiameter, & C M ſemidiameter conjugata. Ducatur F R, producaturque, donec ſecet C M productam in G, Dico eſſe $RG = CA$.

92. Dico etiam, rectangulum ex C A, & C D æquale eſſe parallelogrammo ex C R, & C M. Quare ducta R O perpendiculari ad C M, erit $RO \times CM = CA \times CD$. Unde $CM : CA :: CD : RO$. Quæ demonſtratu facillima ſunt.

93. Sit jam arcus infiniteſimus R L; ducaturque L u parallela ſemidiametro C M, ſecanſque F R in u. Ducatur præterea L Q perpendicularis ad F R. Dico eſſe $P : LQ :: LQ : Ru$; ideoque $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$.

Id facile oſtendes, ſi, producta L u, donec ſecet perpendicularem R O productam in z, & ſemidia-

diametrum CR productam in u, animadverteris, triangula duo Ruz, LuQ ſimilia eſſe, eſſeque Ru: Rz:: Lu: LQ. Sic enim inventis Rz, & Lu, facile intelliges, quo modo ſe habeat LQ ad Ru.

Quæramus igitur primum Rz. Cum ſit axis primus $= 2$ CA, erit axis ſecundus $= \sqrt{P \times 2CA}$, & $CD = \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}$. Eſt autem CM : CA :: CD : RO (92.). Erit igitur $RO = \frac{CA\sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$. Atqui propter ſimilitudinem triangulorum ROG, Rzu eſt RG, ſive CA [91.] : RO :: Ru : Rz. Ergo $Rz = \frac{Ru\sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$.

Quæramus nunc Lu. Primum propter ſimilitudinem triangulorum ROC, Rzx, eſt RO : RC :: Rz : Rx. Hic pro RO, & Rz ſubſtitue valores modo inventos, habebiſque $Rx = \frac{RC \times Ru}{CA}$. Deinde cum poſſit L$u$ confundi cum Lx ordinata ad diametrum ductam per R, eſt enim ux differentia infiniteſima ſecundi ordinis (30); ſequitur ex ipſa hyperbolæ natura, ut ſit $\overline{CR}^2$ ad $\overline{CM}^2$, uti $2CR \times Rx$ ad $\overline{Lu}^2$. Hic pro Rx ſubſtitue valorem modo inventum, habebiſque $Lu = CM\sqrt{\frac{2Ru}{CA}}$.

Li-

Lineis R z, L n ſic inventis, cum ſit, ut initio dixi, $Ru : Rz :: Lu : LQ$, invenies ſtatim $LQ = \sqrt{P \times Ru}$; unde $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Q. e. d.

De revolutione corporis per hyperbolam.

94. Volvatur corpus per hyperbolam A R (*Fig.* 26.) vi centripeta tendente ad focum F, ſitque parameter hyperbolæ $= P$. Sume arcum quemvis infiniteſimum R L, quem corpus certo tempuſculo percurrat. Duc deinde L Q perpendicularem ad F R, tum F T perpendicularem tangenti R T.

Dico, vim centripetam, quam corpus habet in R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac ſi velocitas, quam corpus habet in R, ſit $= u$, exprimi vim centripetam etiam per $\frac{\overline{LQ}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonſtro primam partem. Ducatur L u parallela tangenti R T ſecans F R in u. Exprimet ſane R u vim centripetam, quam corpus habet in R (32.), atqui eſt $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (93). Ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ vim centripetam exprimit. Q. e. d.

Demonſtro partem alteram. Vis centripeta in R expri-

exprimitur, ut modo oſtendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Atqui eſt LQ $= \frac{FT \times u}{FR}$ (37.), ideoque $LQ^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2}$. Ergo vis centripeta in R exprimitur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$. Q. e. d.

95. His viſis dico, vim centripetam in quovis puncto R ejuſdem hyperbolæ eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ a foco F, nempe eſſe $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum RL, ubicumque ſit, eum ſemper eſſe, qui æquali tempore percurratur, erit area RFL perpetuo æqualis (38.). Sit ergo area RFL $= 1$. Atqui eſt LQ proportionalis areæ RFL diviſæ per FR. Ergo $LQ = \frac{1}{FR}$, & $\overline{LQ}^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Eſt autem vis centripeta $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (94.). Erit igitur vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Et quoniam in eadem hyperbola eſt P conſtans, ideoque e formula expungi poteſt, erit tandem vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

96.

96. Conſtat jam & vim centripetam, & velocitatem in hyperbola perpetuo variare. Eſt enim vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (95.); velocitas $= \frac{1}{FT}$ (41.); quæ quantitates perpetuo variant. Nunc jam revolutiones corporum per duas diverſas hyperbolas conſideremus.

97. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas A R, *a r* (*Fig.* 27. 28.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, *f*. His poſitis ſumantur duo quævis puncta R, & *r*; ducanturque F T, *f t* perpendiculares tangentibus R T, *r t*. Dico velocitatem in R eſſe ad velocitatem in *r*, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$.

Dem. Sit velocitas in R $= V$; in $r = u$. Erit vis centripeta in R $= \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (94).
Erit etiam, uti nunc ſupponimus, vis centripeta in R $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$; in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{fr}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æ-

Digitized by Google

quatione elicies $V = \frac{\sqrt{P}}{FT}$; ex altera $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo V (velocitas in R) ad u (velocitatem in r), uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d.

98. Erit ergo, in hujuſmodi hyperbolis, $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula velocitatem exprimens in quovis puncto R.

99. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas A R, $a r$, viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Sint parametri P, p. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, f. His poſitis ſumantur arcus duo quivis infiniteſimi R L, $r l$, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleanturque areæ R F L, $r f l$. Dico, has areas eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis F T, $f t$ perpendicularibus ad tangentes R T, $r t$, erit velocitas in R ad velocitatem in r, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (40.), nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo etiam $RFL : rfl : \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

100. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus R L, $r l$, ideoque etiam areæ R F L, $r f l$ aſſignabiles. Quod facile intelliges, ſi ambo tempora in tempuſcu-

Digitized by Google

ſcula totidem reſolvas inter ſe æqualia, tum areas in areolas ipſis reſpondentes.

101. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas AR, *ar*, (*Fig.* 29. 30.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, quibus duæ quævis areæ PFV, *pfu* deſcribuntur, proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus RL, *rl* percurſi æquali tempore, compleanturque areæ RFL, *rfl*. Tempora, quibus deſcribuntur areæ PFV, *pfu*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas RFL, *rfl* (42.); ſed areæ RFL, *rfl* ſunt uti radices parametrorum (99.); ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ PFV, *pfu*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

102. *Problema*. Volvatur corpus per hyperbolam AR (*Fig.* 31.) vi centripeta tendente ad focum F. Puta jam ipſum cadere e quovis hyperbolæ puncto R verſus F, vi centripeta, quam habet in puncto R, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum corpus cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam, ſe volvens per hyperbolam, habet in puncto R.

Ducatur FT perpendicularis ad tangentem RT; ſitque parameter hyperbolæ $= P$. His poſitis, ſit velocitas in $R = u$. Erit vis centripeta in eodem pun-

cto $R = \frac{\overline{FR}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (94). Sit $RD = x$. Velocitas, quam corpus, cadens, obtinet in D, eſt æqualis duabus radicibus ſpatii ipſius R D ducti in vim centripetam (29). Erit ergo velocitas in D $=$

$$2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}}.$$ Pone igitur æquationem

$$2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u.$$ Prodibit hinc $x\,(RD) = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. Nempe quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

Et quoniam quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri ubique eſt major, quam R F, idcirco corpus cadens a puncto R propoſitam velocitatem non acquirit, niſi ultra focum.

103. Quod ſi punctum R conſtitutum ſit in ipſo vertice A, quoniam ibi F T vertitur in F R, erit $RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2} = \frac{P}{4}$.

APPENDIX AD CAP. IV.

NOtiſſimum apud Mechanicos, nobiliſſimumque theorema illud eſt. Si corpus a puncto quopiam trahatur, ea quidem lege, ut ſit vis attrahens reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; atque interim directione, & velocitate qualibet tranſverſim pellatur; percurret ſectionem conicam. Demonſtrari id ſolet per calculos, & artificia reconditiora. Ego cum vellem, ſi poſſem, hunc etiam locum planiorem facere, in idque incumberem, ſtatim ſenſi, problematis cujuſdam explicatione mihi opus eſſe e geometria plane petenda. Qua de re cum Canterzanum, quem tu, Varene ſuaviſſime, probe noſti, miro ingenio juvenem conſuluiſſem, iſque problema propoſitum apud auctores, quotcumque illi præſto erant, fruſtra quæſiviſſet, maluit tandem ſuum ipſe ingenium periclitari, quam Mathematicorum verſans volumina tempus terere. Rem ergo totam, eleganti quodam præmiſſo lemmate, ſynthetice expedivit, & breviter, ut nihil illi ad ſummam elegantiam deeſſe videretur. Quid lemmatis id ſit, quoque problema illud ſpectet, paucis oſtendam; demonſtrationes prætermittam; quas per te ipſe invenias volo, ne Canterzano omnia debeas. Ad quæſtionem mechanicam, quam initio propoſui, veniam poſtea.

Lem-

Lemma.

104. Sit ſectio quævis conica R P (*Fig.* 33. 34.), cujus axis F A. Sitque F focus ejus ſive interior (fig. 33.) (quo caſu poteſt R P vel ellipſis eſſe, vel parabola, vel hyperbola), ſive exterior [fig. 34.] (quo caſu non poteſt eſſe R P, niſi hyperbola). Sumto in ea puncto quovis R, ducatur F T perpendicularis ad tangentem R T, atque ut eſt dimidia pars parametri ad F T, ſic ſit F T ad F S, ſumaturque FS in linea ipſa F R vel ad partem R [fig. 33.], vel ad oppoſitam (fig. 34.). Hoc facto ducatur linea S T. Dico lineam S T fore parallelam axi F A. Ac lemma quidem huc ſpectat. Ad problema veniamus.

Problema Geometricum.

105. Data recta F R (*Fig.* 35. 36. 37. 38.), datoque angulo acuto F R T, ſectionem conicam deſcribere, quæ focum habeat, ſive interiorem, ſive exteriorem in F; deinde ſic tranſeat per R, ut ſit R T tangens; ac demum parametrum habeat æqualem datæ lineæ P.

Solutio huc ſpectat. Ducatur F T perpendicularis ad R T; ac fiat uti dimidia pars lineæ P ad F T, ita F T ad F S, ſumaturque F S in F R, vel ad partem R (fig. 35. 36. 37.), vel ad oppoſitam (fig. 38.), ducaturque indefinita F C parallela T S. Hoc facto pro-

producta T R in V, ducatur per R linea X Y, ſicut anguli V R X, F R T, ad eamdem partem lineæ T V æquales ſint.

Hic ſane, ſumta F S ad partem R, vel linea X Y concurret cum F C ad partem X in X [fig. 35.], vel erit ei parallela (fig 36.), vel concurret cum ea ad partem Y in Y (fig. 37.). Sumta vero F S ad partem oppoſitam [fig. 38.] numquam non concurret ad partem Y in Y.

In primo caſu (fig. 35.) ellipſim deſcribe, quæ focos habeat in F, & X, quæque tranſeat per punctum R. In ſecundo caſu (fig. 36.) parabolam deſcribe, quæ focum habeat in F, incidente axe in F C, quæque tranſeat per R. In tertio caſu (fig. 37.) hyperbolam deſcribe, quæ focum habeat interiorem in F, exteriorem in Y, quæque tranſeat per punctum R. In quarto caſu (fig 38.) hyperbolam deſcribe, quæ focum habeat interiorem in Y, exteriorem in F, quæque tranſeat per punctum R. Hæ ſcilicet ſectiones conicæ, in ſingulis caſibus deſcriptæ, illæ ipſæ erunt, quas invenire oportebat. Quamquam ſi angulus datus F R T rectus fuerit, problema erit multo expeditius, ac prope omne artificium reſpuet.

Problema Mechanicum.

106. Projiciatur corpus e puncto R (*Fig.* 39.) data quavis directione R T, & data quavis velocitate V. In-

Interim vi centripeta quavis data G trahatur verſus datum centrum F; atque ea ſit attractionis lex, ut vis attrahens reciproce proportionalis ſit quadrato diſtantiæ a puncto F. Invenire curvam R Q, quam corpus percurret.

Ducatur F T perpendicularis ad R T. Tum conſtituatur recta R D, per quam ſi corpus e puncto R cadat, vi G conſtanter urgente, obtineat in puncto D velocitatem V. Tum fiat uti $\overline{FR}^2$ ad $\overline{FT}^2$, ita R D ad lineam aliam quamdam, cujus quadrupla ponatur linea P; ideoque ſit $RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. His ad hunc modum conſtitutis deſcribatur ſectio conica R Q (105), cujus focus interior ſit punctum F, tangens R T, parameter P. Dico, ſectionem conicam R Q eſſe curvam illam, quam corpus datum percurret.

Dem. Fingamus corpus quodpiam volvi per ſectionem conicam, quam deſcripſimus, R Q, vi centripeta tendente ad focum F, eſſeque in R vim ejus centripetam = G. Id enim fieri poſſe oſtendimus (44). Corpus hoc, quod fingimus, habet profecto in R conditiones omnes, quas habet in eodem puncto R corpus datum, quibuſque percurrenda curva determinatur. Nam præter quam quod eamdem habet vim centripetam G, eamdemque diſtantiam a centro trahente F, eamdemque vis centripetæ directionem; quæ quidem omnia e conſtructione ipſa conſtant; habet etiam attractionis legem cum corpore dato commu-

nem;

Digitized by Google

nem; conſtat quippe, vim centripetam in eo corpore, quod per ſectionem conicam volvitur, ſi utique ad focum tendat, eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ (62. 81. 95.). Neque vero dubitari poteſt, quin corpus, quod fingimus, eamdem etiam habeat projectionis directionem, quam corpus datum; nam habet utique directionem tangentis R T. Habet etiam eamdem velocitatem; nam cum ſit $RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$, habet ubique velocitatem, quam haberet in D, ſi illuc caderet vi G conſtanter urgente (76. 88. 102.). Hæc autem ex conſtructione eſt illa ipſa velocitas V, quam corpus datum habet in puncto R. Ambo ergo hæc corpora, & quod fingimus, & quod datum eſt, conditiones illas omnes communes habent, quibus percurrenda curva determinatur (44.). Ergo eamdem curvam percurrunt. Ergo corpus datum percurrit ſectionem conicam R Q. Q. e d.

Ea re non modo oſtendimus, corpus datum ſectionem conicam debere percurrere, ſed etiam ſectionis hujus conicæ inveniendæ viam quamdam aperuimus.

Digitized by Google

CAPUT V.

De revolutionibus duorum corporum ſe mutuo trahentium.

ILlud adhuc nobis conſtans fuit, ut, corporibus duobus ſe mutuo trahentibus, alterum immobile in centro virium poneremus, alterius converſionem explicaremus. Ponamus nunc mobilia ambo, ac de duorum revolutionibus pauca dicamus. Quod ſi quæſtionem vel ad plura corpora traduxeris, vel in duobus omni modo variaveris; in ea ſtatim incurres, quæ reconditiſſima habentur, ac difficillima, nec niſi ab excellentiſſimis mathematicis tractari ſolent. Ego, quæ prima in hac re occurrunt, vix attingam, ut deſiderium excitem; quæ ſubtiliora ſunt, excellentiſſimis illis relinquam. Sed antequam ad rem venio, lemmatis loco id pono.

107. *Lemma*. Sit punctum C (*Fig.* 40.) poſitum intra concavum curvæ P Q, ſumtoque in curva arcu quovis infiniteſimo P E, ducantur C P, C E. Ducatur etiam tangens P D occurrens rectæ C E in D; ac demum ducatur E B parallela C P, ſecanſque P D in B. Dico, lineolam B D eſſe infiniteſimam tertii ordinis.

Dem. Ducatur E G parallela tangenti P D ſecans C P in G. Hinc ſane erit G P infiniteſima ſecundi ordinis (vide 30.), ideoque etiam E B. Jam vero

cum

cum ſit C P : P D : : E B : B D, ſit autem P D infiniteſima, ſi comparetur cum C P; erit etiam B D infiniteſima, ſi comparetur cum E B. Erit ergo B D infiniteſima tertii ordinis. Q. e. d.

108. Quod cum ita ſit, poterit jam ſumi P D pro P B, & D E pro E B. Ideoque ſi corpus quodpiam, vi centripeta tendente verſus C, percurrat arcum P E, putari poterit, lineam P D exprimere velocitatem tangentialem, lineam D E velocitatem initialem a vi centripeta ortam; ac corpus eo tempore percurrere arcum P E, quo tempore ſola vi tangentiali percurreret lineam P D, aut ſola vi centripeta percurreret lineam æqualem lineæ D E.

109. His viſis ad propoſitum venio. Sint corpora duo P, *p* (*Fig*. 41.) ſe mutuo trahentia. Recta P *p* ſic dividatur in C, ut ſit maſſa P ad maſſam *p*, uti C *p* ad C P. Quo facto dicetur C centrum commune gravitatis. Projiciantur jam corpora directionibus contrariis, & parallelis P D, *p d*; ambo quidem æquali vi; ideoque ſint projectionum velocitates reciproce proportionales maſſis (10.) ſitque propterea velocitas corporis P ad velocitatem corporis *p*, uti C P ad C *p*. Projecta ad hunc modum corpora duas curvas P Q, *p q* deſcribent, quibus curvis quid accidat per theoremata tria expediam.

110 *Theor. I.* Lineolæ infiniteſimæ P D, *p d* ea longitudine ſumantur, ut exprimant velocitates projectionum; ideoque ſit P D : *p d* : : C P : C *p*. Ducatur præterea recta D *d*, quæ, ut facile conſtat, tranſi-

bit per C, ſecabitque curvas PQ, *pq* in E, & *e*. His poſitis dico primum, arcus PE, *pe* percurri a corporibus æquali tempore. Dico ſecundo, triangula PED, *ped* ſimilia eſſe. Dico tertio, ſimilia quoque eſſe triangula PCE, *p*C*e*.

Demonſtro primam partem. Ex conſtructione lineolæ PD, *pd* proportionales ſunt velocitatibus projectionum; ergo corpora, ſi vi ſola tangentiali ferrentur, percurrerent lineolas PD, *pd* æquali tempore (5.). Atqui quo tempore vi ſola tangentiali percurrerent lineolas PD, *pd*, eodem tempore vi compoſita percurrunt arcus PE, *pe* (108.). Ergo percurrunt arcus PE, *pe* æquali tempore. Quod erat primo demonſtrandum.

Demonſtro partem alteram. Lineolæ PD, *pd* ex conſtructione ſunt reciproce proportionales maſſis. Lineolæ DE, *de* exprimunt velocitates initiales (108.), ideoque ſunt, & ipſæ reciproce proportionales maſſis (18.): eſt ergo DP : DE :: *dp* : *de*. Atqui cum ſint PD, *pd* parallelæ, ſunt etiam anguli D, *d* æquales. Ergo triangula PED, *ped* ſunt ſimilia. Quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

Demonſtro partem tertiam. Propter ſimilitudinem triangulorum PED, *ped*, æquales ſunt anguli PED, *ped*; ergo æquales ſunt etiam anguli adjacentes PEC, *pe*C. Quare cum in triangulis PCE, *p*C*e* æquales ſint etiam anguli ad verticem C conſtituti, ſequitur, ut triangula PCE, *p*C*e* ſimilia ſint. Quod erat tertio loco demonſtrandum.

Por-

Porro ſi lineas P E , *p e* produxeris in H , & *b*, ut ſit $PE = EH$, & $pe = eb$; tum duxeris rectam H *b*, quæ ſane tranſibit per C, ſecabitque curvas P Q, *p q* in punctis M, & *m*; eadem demonſtratione, qua modo uſi ſumus, facile oſtendes primum quidem, arcus E M, *e m* percurri æquali tempore; deinde triangula E M H, *e m b* ſimilia eſſe; tertio demum ſimilia quoque eſſe triangula E C M, *e* C *m*. Eademque ratio produci in infinitum poterit, donec curvas totas P Q, *p q* expleas.

111. *Theor. II.* Iiſdem poſitis, dico, curvas P Q, *p q* eſſe ſimiles. Id ſic efficio. Propter ſimilitudinem triangulorum P C E, *p* C *e*, quam modo demonſtravimus, eſt $PE : EC :: pe : eC$; itemque propter ſimilitudinem triangulorum E C M, *e* C *m*, eſt $EC : EM :: eC : em$. Eſt ergo $PE : EM :: pe : em$. Præterea ex eorumdem triangulorum ſimilitudinibus ſequitur, ut ſit angulus P E C æqualis angulo *pe* C, & angulus C E M angulo C *e m*; ideoque etiam totus angulus P E M toti angulo *p e m*. Sunt ergo curvarum latercula P E, E M, & *p e*, *e m* circa æquales angulos proportionalia. Quare cum ratio eadem ad latercula alia omnia transferri poſſit, conſtat curvas P Q, *p q* eſſe ſimiles. Q. e. d.

Ex his, quæ hactenus dicta ſunt, corollaria haud pauca duci poſſunt, quæ demonſtratione vix indigent. Horum nonnulla recenſeamus.

112. *Corol. I.* Ducta per C recta quavis M *m*, quæ ſecet curvas P Q, *p q* in M, & *m*, quo tempo-

re

Digitized by Google

re corpus P percurrit arcum P M, eodem tempore corpus p percurret arcum $p\,m$. Itaque erunt ſemper duo corpora in directum cum puncto C.

113. *Corol. II.* Quoniam eſt $CP : Cp :: CE : Ce$, necnon etiam $CE : Ce :: CM : Cm$, ac ſic deinceps; erit etiam $CP : Cp :: CM : Cm$. Cum ſint ergo C P, & Cp reciproce proportionales maſſis, erunt reciproce proportionales maſſis etiam C M, & C m. Conſtitutis ergo corporibus in M, & m, erit adhuc punctum C centrum commune gravitatis. Quare volventibus ſe corporibus per curvas P Q, $p\,q$, commune gravitatis centrum immotum manebit.

114. *Corol. III.* Quoniam trahentia ſe mutuo corpora, & percurrentia curvas P Q, $p\,q$, ſunt ſemper, ut modo dixi, in directum cum puncto C, patet vim centripetam utriuſque corporis ad idem punctum C perpetuo dirigi. Poſſunt ergo ambo corpora in ſuis illis revolutionibus perinde haberi, ut ſi traherentur ab ipſo puncto C ea vi, qua trahunt ſe mutuo.

115. Antequam theorema tertium expedio, placet lemma unum præmittere, quod eſt hujuſmodi. Ducta, ut ſupra, recta quavis M m, quæ tranſeat per C, ſecetque curvas P Q, $p\,q$ in M & m, dico eſſe $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$. Eſt enim, ut in corollario altero monui, $CP : Cp :: CM : Cm$. Ergo $CP + Cp\ (Pp) : CP : CM + Cm\ (Mm) : CM$. Ergo $\overline{Pp}^2 : \overline{CP}^2 :: \overline{Mm}^2 : \overline{CM}^2$, & $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$. Q. e. d. Eadem ratione conſtat eſſe etiam

$\overline{Pp}^2$

$\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{Cp}^2 : \overline{Cm}^2$.

116. *Theor. III.* Iiſdem, ut ſupra, poſitis, ſi corpora ea lege ſe mutuo trahant, ut ſit vis attractiva reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ, dico, curvas P Q, *p q* eſſe ſectiones conicas.

Dem. Si corpora ea, quam dixi, lege ſe trahunt, vis, qua trahitur corpus P, dum eſt in P, eſt ad vim, qua trahitur, dum eſt in M, uti $\frac{1}{\overline{Pp}^2}$ ad $\frac{1}{\overline{Mm}^2}$. Quare cum ſit $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 : \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$ (115.), vis, qua corpus P trahitur, dum eſt in P, erit ad vim, qua trahitur, dum eſt in M, uti $\frac{1}{\overline{CP}^2} : \frac{1}{\overline{CM}^2}$. Perinde ergo res eſt, ut ſi corpus trahatur ab ipſo puncto C, quemadmodum in corollario tertio monuimus, eaque lege trahatur, ut ſint vires reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a puncto C. Ergo erit P Q ſectio conica (106.); neque minus erit ſectio conica *p q*, quæ curvæ P Q eſt plane ſimilis.

Inquirenti in hæc diligentius, jucundum erit ſectiones conicas, quas corpora P, & *p* percurrent, earumque formam, & genus, quæque illis accidant, cognoſcere. Quæ is quidem facile comperiet, qui ſuperiora intellexerit, ſeſeque paululum exercuerit. Non committam ego, ut, plura de his ſcribens, hanc tibi, Varene ſuaviſſime, voluptatem præripiam.

AP-

APPENDIX AD CAP. V.

HActenus corporis trahentis nomine intelleximus maſſam quamdam in unum punctum collectam, ex eoque trahentem. Non erit ab re oſtendere ſphæram homogeneam punctum quodvis extra ipſam poſitum ſic ad ſe trahere, quaſi eſſet ipſa tota collecta in ſuum centrum. Quod cum explicatum fuerit ab aliis aliter; eſt etiam nuper a Canterzano noſtro nullis omnino calculis, quo ingenio eſt, & plane ſynthetice demonſtratum. Idem nunc ego, brevitati conſulens, per integrationem quamdam declarabo, ut, ſi integrales calculos nondum forte, Varene mi, didiciſti, amare tamen jam nunc incipias, & libentius diſcas. Ad propoſitum veniens ſic exordior.

115. *Theorema*. Sit A E B F (*Fig.* 42.) ſuperficies ſpherica homogenea, cujus centrum C; trahatque punctum P extra poſitum. Ea vero attractionis lex ſit, ut vires quadratis diſtantiarum reciproce reſpondeant. Dico, ſuperficiem A E B F non ſecus trahere punctum P, ac ſi tota in centrum C collecta eſſet.

Ut id demonſtrem, ducatur per C recta P C, ſecans ſuperficiem ſphæricam in A, & B. Sumtaque abſciſſa quavis A M ducatur per M planum perpendiculare lineæ P B, quod ſignàbit utique in ſuperficie ſphærica circulum quemdam E F. Ducantur denique rectæ A E, P E.

Dem.

Dem. Sit C A $= a$, A P $= b$, A M $= x$. Erit A E $= \sqrt{2ax}$, & P E $= \sqrt{2ax + 2bx + bb}$. Ptoportio radii ad circumferentiam ea ſit, quæ r ad c. Invenies jam circulum, cujus radius A E, ideſt ſegmentum ipſum ſuperficiei ſphericæ E A F, $= \frac{cax}{r}$. Eritque elementum hujus circuli, ſive ſegmenti $= \frac{cadx}{r}$ exprimens zonulam quamdam E F.

Jam vero vis abſoluta, qua tota hæc zonula trahit punctum P, erit zonula ipſa diviſa per quadratum diſtantiæ P E, nempe $= \frac{cadx}{r \times \overline{2ax + 2bx + bb}}$. Atqui zonula trahit reipſa punctum P, non hac quidem vi abſoluta, ſed vi alia, quæ componitur ex viribus partium omnium zonulam conſtituentium, eſt autem, ut facile oſtendi poteſt, vis abſoluta ad vim hanc compoſitam, uti P E ad P M. Erit ergo vis hæc compoſita $= \frac{ca}{r} \times \frac{\overline{x + b} \times dx}{\overline{2ax + 2bx + bb}^{\frac{3}{2}}}$. Quam formulam commodius integraveris, ſi ponens $2a + 2b = e$, ipſam ſic exſcripſeris $\frac{ca}{r} \times \overline{\frac{xdx}{\overline{ex + bb}^{\frac{3}{2}}} + \frac{bdx}{\overline{ex + bb}^{\frac{3}{2}}}}$. Ubi enim ſic exſcripſeris, ſi feceris $ex + bb = z$, paratiſſima tibi erit integratio, qua confecta integrale prodibit $= \frac{2ca}{eer} \times \frac{ex + 2bb - be}{\sqrt{ex + bb}}$; quod utique

exprimet vim, qua totum ſegmentum E A F trahit punctum P, niſi ſi conſtans quæpiam addenda ſit, aut demenda.

Id ergo ſic exploremus. Non eſt dubium, quin ſi ſit x, ideſt A M, $=o$, vis quoque ipſa, qua ſegmentum E A F trahit punctum P, evadat $=o$. Atqui integrale propoſitum, ſi ſit $x=o$, non utique evadit ipſum $=o$, ſed vertitur in conſtantem $\frac{2ca}{eer} \times \overline{2b-e}$. Hæc ergo conſtans integrali propoſito demenda erit. Quod ubi feceris, ſi in locum e reſtitueris ejus valorem $2a+2b$, exſiſtet tandem integrale $\frac{ca}{r \times \overline{a+b}^2} \times \frac{\overline{ax + o\,x - ab + a}}{\sqrt{2ax+2bx+bb}}$. Idque generatim vim exprimet, qua ſegmentum quodvis E A F trahit punctum P.

Fac ergo $x=2a$, nempe A M $=$ A B. Erit tibi integrale modo inventum $= \frac{2aac}{r \times \overline{a+b}^2}$, quo ſane exprimetur vis, qua ſuperficies ſphærica tota A E B F trahit punctum P.

Quæramus nunc vim illam, qua ſuperficies eadem A E B F traheret punctum P, ſi tota quidem in centrum C collecta eſſet. Quoniam ſuperficies ſphærica, ut notum eſt, æquat circulos quatuor maximos, ea ſane erit $= \frac{2aac}{r}$. Quod ſi dividatur per qua-

dra-

dratum diſtantiæ PC, ideſt per $\overline{a+b}^2$, fiet jam $=$ $\frac{2aac}{r \times \overline{a+b}^2}$. Quo exprimetur vis illa, qua ſuperficies ſphærica AEBF traheret punctum P, ſi tota quidem in centrum C collecta eſſet.

Non ſecus ergo ſuperficies ſphærica AEBF, quam initio propoſuimus, trahit punctum P, ac ſi tota in centro C ſita eſſet.

Hoc idem ad ſphæram ſolidam, atque homogeneam transferes; ſphæram ipſam in ſuperficies ſphæricas infinitas, & concentricas reſolvens. Valebit enim in ſuperficiebus ſingulis ratio eadem, ideoque etiam in omnium ſumma, ideſt ſphæra ipſa.

CAPUT VI.

De vi repulſiva.

NOn omnino videar, mi Torquate, hujus libri titulo ſatisfeciſſe, niſi & vim repulſivam, eamque, quæ inde oritur, corporis per hyperbolam converſionem paucis explicem. Id faciam breviter & quaſi curſim; qui enim ſuperiora intellexerit, in his diligentiam minus deſiderabit.

118. Adhuc finximus ineſſe in corporibus attractivam vim quamdam, qua ſe mutuo trahant. Fingamus nunc ineſſe in ipſis vim repulſivam, qua ſe mu-

Digitized by Google

mutuo repellant ; atque ut vim attractivam æſtimari voluimus producto maſſarum ſe mutuo trahentium diviſo per diſtantiæ quadratum, ſic nunc vim repulſivam æſtimemus. Repellant ſe mutuo corpora duo A, & B. Sit maſſa corporis $A = M$; corporis $B = m$. Diſtantia, quæ inter corpora intercedit, $= D$. Erit vis repulſiva $= \frac{M\,m}{D\,D}$.

119. Satis conſtat, vim repulſivam æque urgere utrumque corpus, quidquid enim repellit, eadem actione repellitur. Quare ut in attractionibus corporum, ſic etiam in repulſionibus velocitates initiales reciproce proportionales ſunt maſſis (10.). Sed hæc, atque alia mittamus, quæ per ſe quiſque facile intelliget. Pauca tantum de repulſione conſtanti moneamus.

120. Quamquam & hæc erunt expeditiſſima, ſi modo intelligatur corpus B, (*Fig.* 43.) dum certa vi pellitur a corpore A verſus D, perinde haberi poſſe, ac ſi æquali vi traheretur a corpore quopiam poſito ad partem D; eumdem quippe motum, eamdemque velocitatem utrovis modo accipiet. Quare ſi pellatur ex parte A vi coſtanti, perinde erit, ac ſi gravitate conſtanti traheretur ad partem D, eademque illi accident, quæ ſupra explicavimus, ubi de gravitate conſtanti egimus.

121. Si ergo corpus B, vi repulſiva conſtanti actum, excurrat libere verſus D, erit ſpatium, per quod excurrit, in proportione compoſita vis repulſivæ,

væ, qua urgetur, & quadrati ejus temporis, quod in illo excurſu inſumit (25). Sit ſpatium $= S$, vis repulſiva $= G$, tempus $= T$. Erit $S = GTT$.

122. Ideoque tempus recte exprimes per radicem ſpatii diviſi per vim repulſivam, nempe $T = \sqrt{\frac{S}{G}}$.

123. Velocitas excurſus, quoniam exprimitur ſpatio diviſo per tempus, exprimetur per $\sqrt{GS}$, nempe per radicem ſpatii ducti in vim repulſivam.

124. Velocitas vero in fine excurſus, quoniam eſt dupla velocitatis illius, qua ſpatium excurritur, exprimetur per $2\sqrt{GS}$. Quæ manifeſta ſatis erunt, ea repetenti, quæ ſupra de gravitate conſtanti tradidimus.

De motu curvilineo ex vi repulſiva.

125. Quoniam corpus incedens per curvam quamlibet R P (*Fig.* 44.) vim facit in quolibet puncto R, ut per tangentem R T excurrat; oportet profecto, ſi curvam quidem ſequi debeat, ut vi alia quapiam urgeatur verſus aliquod punctum *u* poſitum intra concavum curvæ. Quod ſi vis hæc illi adveniat a puncto quopiam F, ad convexam curvæ partem poſito, vis repulſiva appellabitur.

126. Sumto arcu quovis infiniteſimo R L, ſi ducatur L *u* parallela tangenti R T, ſecanſque lineam F R productam in *u*, compleaturque parallelogrammum

mum Tu, exprimet ſane linea R L velocitatem, qua corpus fertur ex R in L, linea R T velocitatem tangentialem, linea Ru vim repulſivam, ſeu velocitatem initialem a vi repulſiva ortam. Hæc per ſe ſatis patent.

127. Quod ſi per univerſum curvæ tractum vis repulſiva ab eodem ſemper puncto F prodeat, dicetur F centrum repulſionis. Ac ſi duæ rectæ ducantur F R, F P abſcindentes in curva arcum quemvis R P, ſpatium R F P dicetur area. His præmiſſis theoremata quatuor paucis explicemus.

128 *Th. I.* Volvatur corpus per curvam R P (*Fig.* 45.) ex repulſione centri F. Sumto arcu infiniteſimo R L, quem certo tempuſculo corpus percurrat, ducatur L Q perpendicularis ad F R; tum E T perpendicularis tangenti R T. Velocitas, qua corpus percurrit arcum R L, ponatur $= u$. Dico eſſe $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$.

Dem. Cum ſit angulus L R T infiniteſimus, anguli L R F, T R F haberi poſſunt tamquam æquales, ac triangula ipſa L R Q, T R F tamquam ſimilia. Quo poſito erit $FR : FT :: RL : LQ$. Ergo $TQ = \frac{FT \times RL}{FR}$. Atqui exprimit R L velocitatem u; ergo

$LQ = \frac{FT \times u}{FR}$. Q. e. d.

129. *Th. II.* Volvatur corpus per curvam quamlibet A Q (*Fig.* 46.) ex repulſione centri F. Dico, duas

duas quaſvis areas A F P, A F Q proportionales eſſe temporibus, quibus deſcribuntur.

Erit id expeditiſſimum, ſi illud modo oſtendatur, areolas deinceps infiniteſimas A F R, R F L, quæ quidem æquales ſint, æqualibus deſcribi tempuſculis. Id ergo oſtendamus.

Ducatur L T parallela lineæ R F, ſecans A R productam in T, compleaturque parallelogrammum *Tu*. Hic jam patet, eſſe R *u* vim repulſivam, R T vim tangentialem, atque his duabus componi vim, qua corpus fertur per R L. Ducatur jam F T. Hic ſtatim apparet, triangula R F T, R F L æqualia eſſe, quippe quæ habent eamdem baſim R F, ſuntque inter eaſdem parallelas L T, R F. Quare cum triangulum R F T æquale ſit areæ R F L, atque area R F L poſita ſit æqualis areæ A F R, erunt triangula R F T, A F R æqualia, & baſes A R, R T æquales.

His poſitis ſic colligo. Vis tangentialis, quam exprimit R T, eſt illa ipſa vis, qua corpus fertur per A R, quaque nititur excurrere per R T. Quare cum ſint A R, R T æquales, tempus, quo corpus vi tangentiali percurreret R T, æquale eſt tempori, quo percurreret A R; atqui tempus, quo percurret R T, æquale eſt tempori, quo percurrit R L (13); ergo A R, & R L percurruntur æquali tempore, atque areolæ A F R, R F L æqualibus tempuſculis deſcribuntur.

Quapropter erunt areæ A F P, A F Q proportionales temporibus, quibus deſcribuntur; quot enim ex infiniteſimis hiſce areolis utraque illarum continet,

Digitized by Google

net, tot etiam tempuſculis deſcribitur.

130. *Theor. III.* Volvantur duo corpora per duas quaſvis curvas R V, *r u*; (*Fig.* 47. 48.) ac ſint centra repulſionum F, *f*. Sint arcus duo quivis infiniteſimi R L, *r l*, qui æquali tempore percurrantur, compleanturque areæ R F L, *r f l*; ac tandem ducantur F T, *ft* perpendiculares tangentibus R T, *r t*. Dico, velocitatem corporis in R eſſe ad velocitatem corporis in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$.

Hic ſane propter infinitam parvitatem angulorum L R T, *lrt* dicentur triangula R F L, *rfl* inſiſtere tangentibus ipſis R T, *r t*; eruntque ipſorum altitudines F T, *ft*. Hoc poſito rem demonſtro.

Quoniam R L, & *r l* percurruntur æquali tempore, erit velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti R L ed *rl* (5). Atqui eſt $RL = \frac{RFL}{FT}$, & $rl = \frac{rfl}{ft}$; ergo velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$. Q. e. d.

131. Neque id minus tenet, ſi puncta R, & *r*, ideoque etiam arcus R L, *r l*, æquali tempuſculo confecti, in eadem curva ſumantur. Et quoniam in eadem curva area R F L eſt conſtans (129), ideoque $= 1$, erit velocitas in quovis puncto R ejuſdem curvæ $= \frac{1}{FT}$.

132. *Theo. IV.* Volvantur duo corpora per duas quaſ-

quaslibet curvas V P, up; (*Fig.* 49. 50.) ac ſint centra repulſionum F, f; Sumantur duo quivis arcus V P, $u\,p$, compleanturque areæ V F P, $u\,f\,p$. Sumantur præterea arcus R L, $r\,l$, qui æquali tempore T percurrantur, compleanturque etiam areæ R F L, $r\,f\,l$. Dico, tempus, quo percurritur arcus V P, eſſe ad tempus, quo percurritur arcus $u\,p$, uti eſt area V F P diviſa per aream R F L, ad aream $u\,f\,p$ diviſam per aream $r\,f\,l$, nempe uti $\frac{VFP}{RFL}$ ad $\frac{ufp}{rfl}$.

Dem. In curva V P eſt utique area R F L ad aream V F P, uti tempus T ad tempus, quo percurritur arcus V P (129). Ergo tempus, quo percurritur arcus V P, erit $= \frac{VFP \times T}{RFL}$. Similiter in curva $u\,p$ invenies tempus, quo percurritur arcus $u\,p$; eſſe $= \frac{ufp \times T}{rfl}$. Eſt ergo illud tempus ad hoc, uti $\frac{VFP \times T}{RFL}$ ad $\frac{ufp \times T}{rfl}$, ideſt uti $\frac{VFP}{RFL}$ ad $\frac{ufp}{rfl}$. Q. e. d.

De corporis revolutione per hyperbolam ex vi repulſiva foci exterioris.

Lemmata quædam e geometria petita.

133. Sit hyperbola A R P; (*Fig.* 51.) vertex A; focus interior f, exterior F. Ducantur ad quodvis e-

Digitized by Google

jus punctum R rectæ F R, fR. Sit S T tangens in puncto R. His confectis ſumatur arcus R L, & ducatur L u parallela tangenti S T, ſecansque fR in V, & F R productam in u. Dico eſſe R u, R V æquales.

Dem. Angulus u R S æqualis eſt angulo T R F, cum ſint ambo ad verticem. Angulus T R F ex natura hyperbolæ æqualis eſt angulo fR T. Ergo anguli u R S, fR T, ſive V R T, æquales. Atqui anguli u R S, V R T æquales ſunt angulis R u V, R V u propter parallelas S T, u V Ergo æquales etiam anguli R u V, R V u. Ergo æquales etiam lineæ R u, R V. Q. e. d.

134. Iiſdem poſitis, puta arcum R L eſſe infiniteſimum, atque a puncto L duc L Q, L q perpendiculares ad F R, fR. Dico eſſe L Q, L q æquales.

Dem. Anguli L R Q, L R q haberi poſſunt pro æqualibus, non enim differunt, niſi propter angulum infiniteſimum T R L. Quare triangula L R Q, L R q præter duos angulos rectos in Q. & q, habent etiam duos alios æquales angulos L R Q, L R q. Ergo ſunt ſimilia. Ac cum habeant communem hypotenuſam R L, erunt L Q, L q æquales. Q. e. d.

135. Iiſdem poſitis ſit parameter $=$ P. Dico eſſe R $u = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$

Dem. Eſt utique R V $= \frac{\overline{Lq}^2}{P}$ (93). Atqui eſt L Q $= L q$

$= L\,q$ (134.), & $R\,u = R\,V$ (133). Ergo erit etiam $R\,u = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Q. e. d.

De corporis revolutione per hyperbolam ex vi repulſiva.

136. Volvatur corpus per hyperbolam A R (*Fig.* 52.) ex repulſione foci P; ſitque parameter hyperbolæ $= P$. Sume arcum quemvis infiniteſimum R L, quem corpus certo tempuſculo percurrat. Duc deinde L Q perpendicularem ad F R, tum F T perpendicularem tangenti R T. Dico, vim repulſivam, qua corpus urgetur in R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac ſi velocitas, quam corpus habet in R, ſit $= u$, exprimi vim repulſivam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times u\,u}{L \times \overline{FR}^2}$.

Demonſtro primam partem. Ducatur L u parallela tangenti R T, ſecans F R productam in u. Exprimet ſane R u vim repulſivam, qua corpus urgetur in R. Atqui eſt $R\,u = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (135). Ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ exprimit vim repulſivam.

Demonſtro partem alteram. Vis repulſiva in R exprimitur, ut modo oſtendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Atqui eſt L Q

$= \frac{FT \times u}{FR}$ (128), ideoque $\overline{LQ}^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2}$. Ergo vis repulſiva in R exprimitur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

137. His viſis, dico, vim repulſivam in quovis puncto R ejuſdem hyperbolæ eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ a foco F, nempe eſſe $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum RL eum ſemper ſumi, qui æquali tempore percurratur, erit area RFL perpetuo æqualis (129). Sit ergo area RFL $= 1$. Atqui eſt LQ proportionalis areæ RFL diviſæ per FR; ergo $LQ = \frac{1}{FR}$, & $\overline{LQ}^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Eſt autem vis repulſiva $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (136). Erit ergo vis repulſiva $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$, rejectaque conſtante P, $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

138. Conſtat ergo & vim repulſivam, & velocitatem perpetuo variare. Eſt enim vis repulſiva $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (137); velocitas $= \frac{1}{AT}$ (131); quæ quantitates perpetuo variant.

139.

139. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas A R, *a r* (*Fig.* 53. 54) ex repulſionibus focorum F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires repulſivæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadiatis diſtantiarum a focis. His poſitis ſumantur duo quævis puncta R, & *r*, ducanturque F T, *f t* perpendicolares tangentibus R T, *r t*. Dico, velocitatem in R eſſe ad velocitatem in *r*, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$.

Dem. Sit velocitas in $R = V$; in $r = u$. Erit vis repulſiva in $R = \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (136). Erit etiam, uti nunc ſupponimus, vis repulſiva in $R = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æquatione elicies $V = \frac{\sqrt{P}}{FT}$, ex altera elicies $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo $V : u :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d. Erit ergo in hujuſmodi hyperbolis $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula velocitatem exprimens in quovis puncto R.

140. Volvantut duo corpora per duas hyperbolas A R, *a r*, ex repulſionibus focorum F, *f*. Sint pa-

parametri P, p. Vires repulſivæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, f. His poſitis ſumantur arcus duo quivis infiniteſimi R L, $r\,l$, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleanturque areæ R F L, $r\,f\,l$. Dico, has areas eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis F T, $f\,t$ perpendicularibus ad tangentes R T, $r\,t$, erit velocitas in R ad velocitatem in r, uti $\frac{\text{RFL}}{\text{FT}}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (130), nec non etiam uti $\frac{\sqrt{\text{P}}}{\text{FT}}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ (139). Erit ergo $\frac{\text{RFL}}{\text{FT}} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{\text{P}}}{\text{FT}} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo R F L $: rfl :: \sqrt{\text{P}} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

141. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus R L, $r\,l$, ideoque etiam areæ R F L, $r\,f\,l$, aſſignabiles. Poterunt quippe tempora in tempuſcula totidem reſolvi inter ſe æqualia, & areæ in areolas totidem ipſis reſpondentes.

142. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas A R, $a\,r$ (*Fig.* 55. 56.) ex repulſionibus focorum F, f. Vires repulſivæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, quibus deſcribuntur duæ quævis areæ P F V, $p\,f\,u$ proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus R L, $r\,l$ percurſi æquali tempore, compleanturque areæ R F L. $r\,f\,l$. Tempora, quibus

bus deſcribuntur areæ P F V, *pfu*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas R F L, *rfl* (132); ſed areæ R F L, *rfl*, ſunt uti radices parametrorum (140). Ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, *pfu* proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

143. *Problema*. Volvatur corpus per hyperbolam A R (*Fig.* 57.) ex vi repulſiva foci F. Puta jam ipſum, dum eſt in R, ſola repulſione abripi, atque excurrere ab R verſus D per lineam F R productam in D, ea vi repulſiva, qua urgebatur in R, ipſum perpetuo, & conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam ſe volvens per hyperbolam habebat in puncto R.

Ducatur F T perpendicularis ad tangentem R T; ſitque parameter hyperbolæ $= P$. His poſitis, ſit velocitas in $R = u$. Erit vis repulſiva in eodem puncto $R = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (136). Sit $RD = x$. Velocitas, quam corpus, excurrens ex R verſus D, obtinet in ipſo puncto D, æqualis eſt duabus radicibus ſpatii ipſius R D ducti in vim repulſivam [124]. Erit ergo velocitas in $D = 2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Pone ergo æquationem $2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc

x

$x\ (R\,D) = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$, nempe quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

144. Quod ſi punctum R conſtitutum ſit in ipſo vertice A, quoniam ibi F T vertitur in F R, erit $R\,D = \frac{P}{4}$.

145. *Problema*. Proiiciatur corpus e puncto R (*Fig.* 58.) data quavis directione R T, & data quavis velocitate V. Interim vi repulſiva quavis data G pellatur a dato centro F. Repulſionis autem lex ea ſit, ut vis repellens reciproce proportionalis ſit quadrato diſtantiæ. *Invenire curvam* R Q, quam corpus percurret.

Quæſtionem ſic expedio. Ducatur F T perpendicularis ad R T. Tum producta F R indefinite in D, fingatur corpus ſola repulſione abreptum, excurrere ab R verſus D vi repulſiva G ipſum perpetuo, & conſtanter urgente; inveniaturque punctum D, ad quod cum corpus pervenerit, obtineat velocitatem æqualem datæ velocitati V. Conſtituta ad hunc modum linea R D, fac eſſe, uti $\overline{FR}^2$, $\overline{FT}^2$, ita R D ad lineam aliam quamdam, cujus quadrupla ponatur linea P. His confectis deſcribatur hyperbola R Q (105), cujus focus exterior ſit F, tangens R T, parameter P. Dico hyperbolam R Q eſſe curvam illam, quam corpus datum percurret.

De-

Demonſtratio ſimillima illius eſt, quam ſupra (106.) indicavimus de vi attractiva agentes, ubi problema ſimillimum propoſuimus. Ad quam ſi redeas, & omnia, uti convenit, huc rite transferas, tibi ipſe facile in hoc etiam problemate, quod de vi repulſiva ponitur, ſatisfacies.

CONCLUSIO.

HAbes adhuc, mi Torquate, nobiliſſimæ illius ſcientiæ, quæ de viribus centralibus tradi ſolet, prima quaſi elementa; quæ ne contemnas velim, propterea quod, nullum certum corpus ſpectantia, in genere ipſo conſiſtant, ideoque in cogitatione tantum poſita eſſe videantur; nam neque illa, quæ in cogitatione tantum ſunt poſita, contemni prorſus debent; & his quidem, quæ adhuc accepiſti, ſi obſervationes modo nonnullæ acceſſerint, ſtatim ſenties, expreſſam quamdam adſpectabilis hujus mundi formam, & quaſi imaginem contineri. Quam imaginem adumbrabo hic leviter, tamquam rudis pictor; tu illam perficies aliquando, ſi voles, atque ornabis; velle autem debebis, ubi & obſervationes plures, ſubtilioreſque collegeris, & longius in hac ipſa virium centralium doctrina provectus fueris.

Ac primum quidem, ut ab initio ultimo exordiar, certiſſimis aſtronomorum obſervationibus ſatis conſtat, planetas omnes circa ſolem volui, mercu-

rium breviori ambitu, venerem latiori; quam deinde mars excipit, tum jupiter, atque is demum, qui omnes ſua converſione complectitur, ſaturnus. Atque hi quidem planetæ primarii dicuntur. His Copernicus terram addit inter veneris & martis orbitas ſitam; quam hypotheſim aſſumunt plerique omnes, ſimplicitate rei ducti atque elegantia. Quid quod commodiſſima eſt ad omnia?

Sunt autem planetæ alii minores, qui circa primarios volvuntur, eorumque ſatellites appellantur. Horum quatuor volvuntur circa jovem, quinque circa ſaturnum; ac ſi terram in planetis primariis numeramus, erit ei luna pro ſatellite. Satellites planetæ etiam ſecundarii dicuntur.

Ad primarios redeamus. In his Keplerus philoſophus longe præſtantiſſimus obſervationes habet duas; quibus nihil illuſtrius; quæ quoniam perpetuæ ſunt, habentur pro legibus. Duas has leges, ſive obſervationes, ſeorſim conſideremus, ut appareat, quid, his poſitis, generalis virium centralium theoria in planetis nos doceat.

Primà Kepleri lex eſt: Cum planeta quiſque per ellipſim quamdam volvatur, cujus focum alterum ſol occupat; ſuum ſic motum in ea revolutione temperat, ut areæ, quæ in illo foco, ubi ſol ſedet, terminantur, proportionales ſint temporibus, quibus a planeta deſcribuntur.

Hic jam, ſi ea conſulas, quæ ſupra numero 39 tradidimus, & facile & ſtatim intelliges, vim quamdam

Digitized by Google

dam in natura eſſe oportere, quæ planteas ſingulos perpetuo urgeat verſus eum focum, quem ſol tenet; perinde ac ſi ipſe ſol planetas ſingulos ad ſe traheret, nihilque aliud eſſet in planetis ſingulis vis centripeta, quam ipſa ſolis attractio. Hinc omnis Nevtonianorum phyſica manaſſe videtur.

Quod ſi ea repetas, quæ numeris *61*, & *62* demonſtravimus, compertum jam tibi erit, vim centripetam cujuſque planetæ ſic per totum ejuſdem planetæ curſum variare, ut ſit ubique reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ a ſole. Ac ſi ellipſeos, quam planeta percurrit, & majorem axem cognitum habeas & parametrum (utrumque autem ex obſervatione cognoſces) nihil jam erit expeditius, quam vires centripetas varias, quas planeta idem in datis quibuslibet punctis obtinet, inter ſe comparare. Neque minus velocitates comparare poteris, ſi ea repetas, quæ numeris 40, & 41 demonſtrata ſunt; nam varias eſſe in eodem planeta etiam velocitates, ex numero *63* apparet. Hæc tibi erunt e prima Kepleri lege, ſi vel tantiſper ad generalem, quam tradidimus, theoriam reſpexeris, apertiſſima.

Altera Kepleri lex eſt. Si duorum quorumlibet planetarum converſiones inter ſe conferantur, numquam non invenientur quadrata temporum periodicorum proportionalia cubis axium majorum.

Licet jam ergo illud ad planetas transferre, quod numero 73 demonſtravimus, ac ſtatuere vires centripetas duorum quorumlibet planetarum, ſi inter ſe

conferantur, reciproce proportionales eſſe quadratis diſtantiarum a ſole. Quo ſtatim apparet, ſolem (ſi vis quidem planetarum centripeta ſolis attractio eſt) attractivam neſcio quam vim ad omnia planetarum ſpatia diffundere, quæ ſit ubique quadrato diſtantiæ proportionalis; planetaſque omnes eodem attractionis genere a ſole trahi.

Hic jam vides, quid illa ſit adeo celebris planetarum in ſolem gravitatio, in qua Nevtoniani adeo gloriantur. Jure illi quidem ac merito. Quamquam gravitationem neſcio quam & Keplerus, vir longe graviſſimus, præſenſiſſe fertur, & Carteſius explicaſſe, philoſophus cum excellentiſſimo quoque comparandus; nulla eſt enim philoſophiæ pars, in qua non longe præſtiterit. Sed ille cum gravitationis opinionem e vortice quodam ſuo deduxiſſet; nutante vortice opinio quoque nutare viſa eſt; ut melius ſibi conſuluiſſe Nevtoniani videantur, qui obſervatione, & mathematica ratione contenti gravitationem poſuerunt, cauſam quærere noluerunt. Sed ad propoſitum redeamus.

Cum ſint ergò vires centripetæ duorum quorumlibet planetarum, ſi inter ſe comparentur, reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a ſole; jam illa omnia ad planetas traduci poterunt, quæ numeris 67. 69. 70. 71. diſſeruimus. Quare & velocitates, quas duo quivis planetæ, in quibuslibet datis punctis habent, comparare poteris; & facile intelliges, areas, quas planetæ æquali tempore deſcribunt, para-

Digitized by Google

rametrorum radicibus proportionales eſſe; & tempora periodica proportionalia eſſe totis areis, ſi hæ quidem radicibus parametrorum dividantur. Quæ theoremata & obſervatione probantur, & ſunt ex ipſa virium centralium theoria uſque adeo manifeſta, ut ſit inutilis obſervatio. Hæc adhuc dixi de planetis primariis.

Eadem facile ad ſecundarios transferentur. Quippe quia obſervationibus conſtat, ſecundarios omnes circa primarios ſuos non ſecus volvi, quam primarios circa ſolem. Itaque quemadmodum ſol ad ſe trahere primarios dicitur, proclive eſt credere, primarios etiam ſatellites ſuos ad ſe trahere. Eſt ergo communis quædam ſatellitum gravitatio in primarios; & ea quidem, quantum ſcire poſſumus, ejuſdem plane generis, cujus eſt primariorum gravitatio in ſolem.

Quo loco dignum eſt animadvertere, vim centripetam, quæ Lunam verſus terram urget, terreſtrium corporum gravitati eſſe plane ſimilem. Etenim ſi, obſervando, ſpatium notetur, quod luna, in illa tanta a terra diſtantia, vi centripeta, uno minuto temporis conficit; tum ex eo colligatur, quantum ſpatii eodem tempore confectura ſit, ſi hic inter terreſtria verſetur; eam facile apparebit, idem ſpatium confecturam eſſe, quod hæc terreſtria pari tempore cadendo conficiunt.

Videtur ergo luna eodem gravitationis genere in terram gravitare, quo terreſtria quæque gravitant; ut ſit jam & terreſtribus corporibus, & lunæ, & ſatel-

tellitibus aliis, & planetis omnibus gravitatio quædam, attractioque communis. Hinc illa in philoſophorum ſcholas pervaſit opinio, ut credantur omnia ſe mutuo trahere; qua opinione qui utuntur ad quidlibet, nihilque non attractione explicant, quoniam genus perſæpe mutant, & alias leges comminiſcunſcuntur, atque alias, vimque ipſam in repulſivam arbitratu ſuo vertunt, videant ne attractionis minuant dignitatem. Simplicitatem certe, qua maxime commendabatur; illi adimunt. Sed ad cæleſtia redeamus, in quibus attractio eſt illuſtrior.

Trahentibus ſe mutuo planetis omnibus (oportet enim ſic eſſe, ſi omnia quidem ſe mutuo trahunt) nemo ſane mirabitur, quod turbentur illi interdum, & ab eo curſu, quem ſolis attractio poſtulat, aberrent non nihil; non quod ſoli non obtemperent, quemadmodum ſupra poſuimus; ſed quia planetis etiam aliis, præſertim ſi propius acceſſerint, eſt illis obtemperandum. Et ſane turbationes, aberrationeſque in planetis varias aſtronomi diligentiſſimi compertas habent; conſentienteſque cum attractione mutua invenerunt, eas quidem, in quibus calculos experiri voluerunt; eſt enim in multis implexa adeo ſupputatio, & longa, ut ferri vix poſſit. Perexiguæ autem ſunt turbationes illæ, quas dixi, aberrationeſque, ut obſervatorem, niſi diligentiam adhibeat, facile fugiant. Cujus rei cauſſa eſſe poteſt, quod planetarum maſſæ exiguæ admodum ſint, ſi cum ſolis maſſa comparentur, ſitque idcirco pla-

ne-

netæ cujuſvis attractio, ſi cum ſolis attractione conferatur, prope contemnenda. Hæc fuſius non perſequor; nam neque meum id eſſe arbitror, nec loci hujus.

Ceterum quæ ſit maſſarum proportio, in ſole præſertim, in terra, in jove, in ſaturno, ex iis cognoſci poteſt, quæ numero 74 demonſtravimus. Sunt enim ſol, terra, jupiter, ſaturnus, ut ante diximus, centralia quædam corpora, circa quæ planetæ alii volvuntur ſive primarii, ſive ſecundarii, ellipſes deſcribentes varias, in quarum focis illa ſedent. Jam ergo ſi & axes ellipſium harum cognoveris, & periodica planetarum tempora, id quod obſervationes docebunt, ex eo, quem dixi, numero 74 proportionem ſtatim colliges, quæ inter centralium illorum corporum maſſas intercedit. Hinc apparebit, quanto ſolis maſſa planetarum omnium maſſas ſuperet. Cognitis porro planetarum maſſis, (ut ne phyſicorum oblectamenta alia prætermittamus) quoniam & magnitudines ex obſervatione cognoſcentur; nihil negotii erit denſitates etiam cognoſcere. Quibus rebus cognitis facile innoteſcet, quantum corpora quæque gravitent, ſi vel in ſole, vel in terra ponantur, vel in jove, vel in ſaturno. Quæ aſtronomi quidem vix curant; phyſici curioſiores conſectantur.

Illud magis ad aſtronomos pertinet, quod cum planetæ exigua admodum maſſa ſint, uti diximus; ſolem, etſi ipſum quoque ad ſe trahunt, ſinunt tamen manere quaſi immobilem. Fac enim, ſolem &

pla-

planetam quemvis, trahentes ſe mutuo, jam inde ab initio rerum ſimiliter fuiſſe projectos, uti duo illa corpora, de quibus ſupra in quinto capite diſſeruimus. Oportebit ſane ſolem circa commune gravitatis centrum ellipſim quamdam deſcribere, quæ illi reſpondeat, quam planeta deſcribit, eique ſit plane ſimilis. Id colliges in illo, quod dixi, capite ex numero 111. & ſequentibus. Quod ſi planetæ maſſa ad maſſam ſolis ſit longe minima, conſequens erit, ut commune gravitatis centrum centro ſolis quamproximum ſit; deſcribetque ſol ellipſim uſque adeo parvam, vix ut moveri videatur. Ac motus quidem ſolis non uni tantum planetæ reſpondere debet, ſed multis; & modo huc verti, modo illuc pro varia planetarum, vi diſtantia, ac ſitu; verum cum tenuiſſimæ planetarum omnium maſſæ ſint, ſol utique deturbari ſe ab nullo patietur; trepidationes tantum quaſdam accipiet, oſcillationeſque quam minimas.

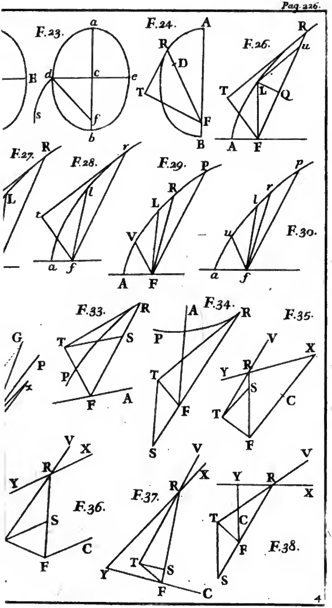
Res ipſa monere videtur, ut de cometis quoque dicamus, qui longiſſime advenientes perſæpe intra planetarum orbitas ſe immittunt, ac planetæ haberi volunt, Nevtono probante. Et ſane ſi illa tenent, quæ de communi corporum omnium attractione modo diximus, oportet, cometas quoque a ſole trahi. Ac ſi illa repetamus, quæ in Appendice Cap. IV. monuimus, manifeſtum erit, debere eos, ut qui tranſverſim projecti ſunt, ſectiones quaſdam conicas ſuo curſu deſcribere, in quarum foco ſol ſedeat, ut planetas pulcherrime imitari videantur. Itaque, ut pla-

netarum, ſic etiam cometarum viæ definiri jam poterunt, & conſtitui tempora, & reverſiones præcognoſci, in quibus magna cum ſpe recentiorum aſtronomorum exercetur labor; & vero obſervationes, quas quidem ad calculos revocaverunt, egregie adhuc reſpondere viſæ ſunt, ut appareat in omnibus Nevtoni felicitas.

Hæc dixi, ut intelligas, quantas phyſicis commoditates jam illa afferant, quæ de viribus centralibus dicta a nobis ſunt; etſi illa cum diceremus, ad nullum certum corpus reſpicientes in genere ipſo conſiſteremus. Quæ ſi animo, mi Torquate, infixeris penitus, feceriſque ut ſint tibi in quæſtione qualibet paratiſſima, putare debebis, te etiam in phyſicis non parum profeciſſe.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

MEMOIRE

Sur les Figures, & les Solides Circonſcrits au Cercle, & à la Sphère.

On ſait qu' Archimède, le père des Mathématiciens, trouva dans l' examen qu' il fit des propriétés de la Sphère & de celles du Cylindre qui lui eſt circonſcrit, que les ſolidités de ces deux corps ſont entr' elles commes leurs ſurfaces; il voulut que cette découverte ſervit d' ornement à ſon tombeau, ce qui fit honneur à la decouverte même. Environ deux mille ans après, le Père Tacquet, fameux Géomètre, aperçut une ſemblable propriété dans le cône équilatéral, & eut le plaiſir d' exprimer par des nombres le rapport de ce cône à la Sphère, comme Archimède l' avoit fait pour la Sphère & le Cylindre. Le Père Tacquet n' eut pas la même bonheur lorsqu' il s' aviſa de circonſcrire à la Sphère un autre Solide qu' il appella *Rhombe quarré*; car quoique ce Rhombe quarré & la Sphère ſoient entr' eux comme leurs ſurfaces, cette proportion ne ſauroit étre exprimée en termes rationeles, ce qui eut èté à ſouhaiter pour la beauté du théorème.

Ff 2 L' exem-

L' exemple de Tacquet m' a donnè envie d' étendre encore plus loin le thèorème d' Archimède, & même de le tranſporter, pour ainſi dire, au Cercle; car y' ai pensè que ſi l' on pouvoit circonſcrire à un cercle, un Polygone, qui fût au cercle même comme ſon périmètre à la circonférence, on pourroit admirer cette proportion preſqu' autant que celle qui a été trouvée par Archimède, & par Tacquet. Cette recherche m' a conduit à deux propoſitions, dont l' univerſalité ne permet gueres d' en chercher d' autres: je les expoſerai avec des remarques qui ſerviront à en faire ſentir toute l' étendue.

PREMIERE PROPOSITION.

Tout polygone circonſcrit au Cercle eſt au Cercle même, comme ſon Périmètre à la Circonference du Cercle.

DEMONSTRATION.

Soit T (*Fig.* 1.) le centre d' un Cercle, dont le rayon $TR = r$. Suppoſons la circonférence $= C$, le cercle lui-même ſera $= \frac{Cr}{2}$. Qu' on circonſcrive au même cercle un poligone, dont' les côtes ſoient des lignes droites A B, C D, E F &c. d' une longueur priſe à volonté, & en nombre quelconque: il eſt clair, que ſi du centre T l' on tire deux lignes

T A,

TA, TB aux extrémités de chaque côté AB, on aura réſolu tout le polygone en autant de triangles, qu' il y aura de côtés. On voit en même temps que tous ces triangles auront leurs ſommets au centre T, & une même hauteur $= TR = r$, & que leurs baſes feront les côtes mêmes AB, CD, EF &c. d' où il ſuit que la ſomme des triangles, c' eſt-a-dire, le polygone luimême $r \times \frac{AB + CD + EF}{2}$, &c. or le périmètre $= (AB + CD + EF)$ &c. & on a d' ailleurs cette proportion $r \times C \frac{AB + CD + EF}{2}$ &c. $\frac{Cr}{2} :: AB + CD + EF$, &c. C.

Donc le polygono circonſcrit, eſt au cercle comme ſon périmètre à la circonférence du Cercle C. Q. F. D.

I. Remarque. Il eſt indifférent que le polygone ſoit régulier ou irrégulier, la démonſtration s' applique également à tous les polygones circonſcrits.

II. Remarque. On voit d' abord qu' outres les polygones circonſcrits, il eſt trèsfacile d' en décrire autour du cercle une infinité d' autres, qui auront la même propriété: Par exemple; ſi l' on décrit autour du Cercle XR, [*Fig.* 2.] un polygone ABCDEFGHIK, de manière que le côté AB étant parti d' une tangente AX, le côté CB d' une tangente CR, & ainſi de ſuite, le polygone décrit puiſſe ſe rèſoudre en autant de triangles qu' il y a de côtés, ainſi que nous l' avons déjà dit des

po-

polygones circonſcrits ; ce polygone ſera auſſi au cercle comme ſon périmètre à la circonférence. On le prouvera en y appliquant la même démonſtration.

Il ſuit de-là, que ſi l' on circonſcrit au cercle X R (*Fig.* 3.) pluſieurs polygones A E L, C G L, les côtés de l' un & de l'autre s' entrecoupant en B, D, F, H &c. & que l' on prenne ſeulement les parties exterieures des côtés, ſavoir, A B, B C, C D, D E &c. de ſorte qu' on en compoſe un polygone tel que A B C D E &c.; ce polygone ſera toujours au cercle comme ſon périmètre à la circonference du cercle.

III. Remarque. Il eſt évident par la propoſition générale qu' on vient de démontrer, que les polygones circonſcrits au même cercle ſont entr' eux comme leurs périmètres.

SECONDE PROPOSITION.

Tout ſolide terminé de toutes parts par des plans, & circonſcrit à une Sphère, eſt à la Sphère même, comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère.

DEMOMSTRATION.

Soit T (*Fig.* 4.) le centre d' une Sphere, dont le rayon T R $= r$. Suppoſons la circonférence du plus grand Cercle $= c$: la Sphère ſera $= \frac{2crr}{3}$, &

ſa

ſa ſurface $= 2cr$. Soit circonſcrit à la même Sphère un Solide terminé par des plans A B, C D, E F &c. de telle grandeur, figure, & en tel nombre que l' on voudra: Il eſt clair que ſi par tous les côtés de chaque plan A B, on mène d' autres plans qui paſſent par le centre T, on aura réſolu tout le ſolide. On voit auſſi que toutes ces pyramides auront leurs ſommets aut centre T, & une même hauteur $= TR = r$, & que leurs baſes ſeront les plans mêmes A B, C D, E F &c. d' ou il ſuit que la ſomme de toutes les pyramides, c' eſt à-dire, le ſolide lui-même ſera $r \times (\frac{AB + CD + EF}{3}$, &c. mais la ſurface du ſolide, $= AB + CD + EF$ &c. & on d' ailleurs cette proportion $r \times (\frac{AB + CD + EF}{3})$, &c.: $\frac{2crr}{3}$: : $AB + CD + EF$, &c. $2cr$. Donc le ſolide circonſcrit à la Sphère, eſt à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère. C.Q. F. D.

I. Remarque. Il n' importe nullement que le ſolide circonſcrit ſoit régulier ou non, la demonſtration s' appliquant à tous les polygones circonſcrits ſans exception,

II Remarque. On voit d' abord qu' outres les polygones circonſcrits, on en pourra décrire autour de la Sphère une infinité d' autres, qui auront la même propriètè, pourvu que chaqune des ſurfaces dont ils ſont terminés étant partie d' un plan qui touche le ſphère, le ſolide puiſſe ſe reſoudre en autant

tant de pyramides qu' il y a de ces ſurfaces ; car ces ſolides feront auſſi à la Sphère en raiſon de leurs ſurfaces, ce qu' on prouvera en y appliquant la précédente démonſtration.

On voit par là combien il eſt facile de circonſcrire à une Sphère, ou bien de décrire à l' entour, un ſolide qui ſoit à la Sphère même, comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère.

III. Remarque. Il eſt clair que tous les ſolides circonſcrits à la même Sphère, ſont entr' eux comme leurs ſurfaces.

IV. Remarque. Si l'on prend le Cylindre (ſelon la permiſſion qu' en donne la Géomètrie des infiniment petits) pour un priſme, & le cône pour une pyramide, en ſuppoſant que les ſurfaces courbes de ces ſolides ſoient compoſées d' une infinité de plans, il eſt clair que le cylindre auſſi bien que le cône étant circonſcrits à une Sphère, ils la doivent toucher par tous ces plans, ce qui les ramène à l' eſpèce des ſolides que nous avons conſidé és juſqu' ici; il n' en faut pas davantage pour démontrer que le Cylindre & le cône étant circonſcrits à une Sphère, feront à la Sphère même, comme la ſurface du Cylindre, ou du cône à la ſurface de la Sphère. On voit déja que le théorème d' Archimède, & celui de Tacquet ne ſont que deux cas particuliers de ma propoſition qui eſt ſi générale, que nonſeulement elle les embraſſe tous deux, mais encore qu' elle les étend à l' infini. C' eſt ce que l' on va voir dans les remarques ſuivantes.

Pour

Digitized by Google

Pour le Cylindre .

V. Remarque . SOit le Cylindre B H (*Fig.* 5.) circonſcrit à une Sphère A M T , le cylindre & la Sphère feront entr' eux en raiſon des ſurfaces : c' eſt le Théorème du grand Archimède. Ma propoſition y arrive, & s' étend encore au-delà : car ſi le cylindre B H étant prolongé indéfiniment juſqu' en F , on le coupe par le plan E F , qui touche la Sphère au point M , on aura un morceau de cylindre B E F D B, que j' appellerai *cylindraceum* , & qui par ce qu' on a dit à la remarque précédente , ſe réduira à l' eſpèce des ſolides qui ſont compris dans ma ſeconde propoſition ; donc le *cylindraceum* B E F D B , ſera auſſi à la ſphère , comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère.

Si on ſe plaît a trouver des raiſons de nombre à nombre , il ſera tre facile de faire une infinité de *cylindraceum* commenſurables à la Sphère. Voici comment.

Soit C le centre de la Sphère , A T le diamètre, qui eſt àuſſi axe du cylindre. Ayant pris ſur ce diamètre une ligne C P qui ſoit au rayon de la Sphère en raiſon rationelle, & menè P M perpendiculaire a C P, qui coupe la ſurface de la Sphère au point M , sì l' on coupe le cylindre par un plan E F , qui touche la Sphère en M , on aura toujours un *cylindraceum* B E F D B commenſurable à la Sphè-

re: ce qui ſe peut démontrer par un petit calcul.

VI. Remarque. Ma propoſition ne s' arrête pas au *cylindraceum* dont je viens de parler; car ſi ayant une fois prolongé le cylindre B G [*Fig*. 5.] indéfiniment juſqu' en F, & l'aïant coupè par le plan E F, qui touche la Sphère au point M, on le prolonge encore de l' autre côté indéfinement juſqu' en K, & qu' on le coupe par un autre plan I K, qui touche auſſi la Sphère au point V, on aura un autre *cylindraceum* F E I K F, qui ſera auſſi à la ſphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère.

VII. Remarque. Et ſi l' on coupe, ou le cylindre B H (*Fig*. 5.), ou bien l' un des *cylindraceum* B E F D B, ou l' autre F E T K F par d' autres, & d' autres plans à l' infini, dont chacun touche la Sphère, il en reſtera toujours autour de la Sphère un morceau de cylindre, terminé par une ſurface cylindrique coupée en mille façons, & par autant de plans que l' on voudra; & ce morceau ſera auſſi à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère. C' eſt la même propoſition & la même démonſtration qui regnent par tout.

Pour le Cône.

VIII. Remarque. Soit le Cône B V L (*Fig*.) circonſcrit à une Sphère A M T. Tacquet à trouvè très-ingénieuſement que ſi ce cône eſt équilateral, il ſe-
ra

ra à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère. Ma ſeconde propoſition n' eſt pas ſujette à cette condition, car la démonſtration que j' en ai donée, ſelon la IV. Remarque, s' appliqua d' elle-même à tout cône circonſcrit à la Sphère. Il eſt donc prouvé que tout cône circonſcrit à une Sphère a la même propriété que l' équilateral, c' eſt-à-dire qu' il eſt à la Sphère, comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère.

Si l' on veut s' arrêter à des cônes qui ſoient à la Sphère en raiſon rationelle, il ne ſera pas non plus néceſſaire d' avoir recours au cône équilatéral, puiſque l' on en peut faire une infinité d' autres, qui ſeront auſſi commenſurables à la Sphère voicì comment. Soit C le centre de la Sphere, A T le diamètre, qui ſera auſſi axe du cône. Que l' on prenne ſur ce Diamètre la ligne C P commenſurable au rayon de la Sphère; & qu' on mène P M perpendiculaire a C P, qui coupe la ſurface de la Sphère au point M; ſi l' on circonſcrit à la Sphère un cône B V L, dont le côté V B la touche au point M, le cône & la sphère ſeront toujours en raiſon rationelle. On le prouvera par un calcul trèsaiſé.

IX. *Remarque*. Revenons à notre propoſition: Si le cône B V L (*Fig. 6.*) que l' on a ſupposè juſqu' ici avoir la baſe circulaire, eſt prolongé indéfiniment juſq' en K, & traversé par un plan G K, qui touche la Sphère au point N, en ſorte que l' on forme un autre cône V G K, dont la baſe ſera une

ellipſe, ce cône VCK ſera auſſi à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère; car ce n' eſt qu' un autre cas de ma propoſition.

X. *Remarque*. Les mêmes choſes ſuppoſées, ſi du côté du ſommet V (*Fig.6.*) on coupe le cône par un plan EF, qui touche la Sphère au point I, le morceau BEFLB, qui reſtera du cône BVL, auſſi bien que le morceau GEFKG, qui reſtera du cône GVK, ſera à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère. Et ſi l' on coupe de même le cône BVL, & le cône GVK par d' autres, & d' autres plans à l' infini, dont chacun touche la Spère, il en reſtera toujours un morceau de cône terminé par une ſurface conique coupée en mille ſens, & par autant de plans que l' on voudra, qui ſera auſſi à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère. La raiſon en eſt toujours la même.

Pour d' autres Solides.

XI. *Remarque*. IL y a d' autres ſolides, qui ne ſont ni cylindres, ni cônes, mais qui ſe compoſent de l' un & de l' autre de ces deux corps. Ma propoſition les embraſſe auſſi bien que les cylindres, & les cônes ſimples: j'en donnerai quelqués exemples. Soit un demi-cercle ANT (*Fig.* 7.), dont le centre ſoit C, & le diamètre AT. Soit pris ſur ce diamètre un point quelconque Q; ayant tiré QR per-

perpendiculaire à C Q, & égale au rayon du cercle, on menera du point R une tangente R B, qui rencontrera la ligne A B perpendiculaire au diamètre en B, & une autre tangente R V, qui rencontrera le même diamètre prolongé en V. Cela fait, ſi l'on fait tourner autour de la ligne A V le demi-cercle A N T avec le trapèze A B R V, on formera par la révolution du demi-cercle une Sphère, & par la révolution du trapèze un ſolide circonſcrit à la Sphère, qui ſera composé d'un cylindre formè par la révolution du rectangle B Q, e d'un cône formé par la révolution du triangle V R Q. Il eſt clair que ce ſolide entre dans l'univerſalité de ma propoſition, & par conſéquent qu'il eſt à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère.

Si on a ſoin de prendre le point Q de manière que la raiſon de C Q au rayon du demi-cercle ſoit rationelle, la raiſon du ſolide à la Sphère le ſera auſſi.

XII. Remarque. Soit un demi-cercle A N T (*Fig.* 8.) dont le centre ſoit C, & le diamètre A T. Ayant pris ſur ce diamètre deux points quelconques Q & S, l'un en deçà, & l'autre en delà du centre, que l'on mène deux lignes Q R, S L perpendiculaires au diamètre, & dont chacune doit être ègale au rayon du cercle. Cela fait, qu'on mène R L, qui touchera le demi-cercle au point N, & les deux tangentes R V, L H, qui rencontrent le diamètre A T prolongé en V & H. Si l'on fait tour-

ner

ner autour de la ligne V H le diamètre A N T avec le trapèze V R L H, il ſe formera par la révolution du demi-cercle une ſphère, & par la révolution du trapèze un ſolide circonſcrit à cette Sphère, qui ſera composé d' un cylindre formé par le révolution du rectangle L Q, & de deux cônes formés par la révolution des deux triangles V R Q, A L S. En ſuivant toujours le même raiſonnement, on trouvera ſans peine, que ce ſolide eſt auſſi à la Sphère, comme ſa ſurface à la ſurface de la ſphère.

Si les points Q & S ſont pris de manière que les ligne C Q, C S ſoient l'une & l' autre commenſurables au rayon du demi-cercle, la raiſon du ſolide à la Sphère ſera auſſi rationelle.

XIII. Remarque. Soit un demi-cercle A N T (*Fig. 9*) dont le centre ſoit C, & le diamètre A T. Ayant pris ſur ce diamètre un point quelconque Q, & mené la ligne Q R perpendiculaire au diamètre, & plus longue que le rayon, ſoient tirées deux tangentes R V, R H, qui rencontrent le diamètre A T prolongé en V, & H. Si l' on fait tourner autour de la ligne V H le demi-cercle A N T avec le triangle V R H, on aura par la révolution du demi-cercle une Sphère, & par la révolution du triangle un ſolide circonſcrit à la Sphère, qui ſera composé de deux cônes formes par le révolution des deux triangles Q C V, Q R H, Y' appellerai ce ſo-de *biconicum*.

Il eſt certain qu' en variant les longueurs C Q, & Q R,

& Q R, on peut circonſcrire à une même Sphère une infinité de *biconica*. Le fameux Tacquet en a conſidé.é un qui ſe forme en prenant C Q égale à zéro, c' eſt à-dire, retirant le point Q jusqu' au centre C, & de plus prenant Q R de tellé longueur, qu' elle oblige l' angle V R H d' être droit. A ces conditions il nous aſſure que le *biconicum* qu' il appelle *rhombe quarré*, ſera à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la ſphère.

Ma propoſitiòn peut ſe paſſer de toutes ces conditions, car elle embraſſe tout *biconicum* ſans exception. Ce n' eſt donc pas ſeulement le *biconicum* de Tacquet qui a la propriété d' être à la Sphère à la quelle il eſt circonſcrit, comme ſa ſurface à la ſurface de la même ſphère c' eſt une propriété qui convient à tous les *biconicum*. J' en reviens toujours à ma propoſition, car elle eſt univerſelle, & très-courte. Ceux qui auront envie de calculer, pourront démontrer ce même théoreme, auſſi-bien que beaucoup d' autres, par des ſupputations particuliéres aux quelles ma propoſition n' aura point de part.

Tacquet a trouvé que ſon *biconicum* étant circonſcrit à une Sphère, il eſt à la même ſphère en raiſon de la diagonale du quarre au côté: proportion commode mais qui ſeroit plus agréable, ſi elle étoit rationelle. Cependant, ſi l' on veut un *biconicum* commenſurable à la ſphère, il ſuffira que les deux lignes C Q & Q R, ſoit l' une & l' autre commenſurables au rayon du demi cercle, & de plus

que

que la différence de la ſomme des deux quarrés de C Q & de Q R au quarré du rayon ſoit elle même un nombre quarré ; ce qui ſe fera par un calcul très-facile.

XIV. Remarque. Je ferais ici une remarque d' une ſi grande étendue, que pluſieurs de celles que nous avons déjà faites y reviendront, mêmes les théorèmes d' Archimède & de Tacquet. Soit circonſcrit à un cercle dont le centre eſt T (*Fig.* 10.) un polygone quelconque A B C D E F E, ou bien qu' on décrive à l' entour (*Fig.* 11.) A B G D E F G H I K tel qu' on l' a proposé à la ſeconde remarque de ma première propoſition. Si par le centre T on conduit une ligne droite X Z quelconque, qui traverſant le centre & le polygone, les diviſe en deux, & que l' on faſſe tourner autour de X Z le demi-cercle avec l' une e l' autrou partie, telle qu' on voudra, du polygone diviſé; on formera toujours par la révolution du demi-cercle une ſphère, par la révolution de la partie tournoyante du polygone, un folide qui ſera à la ſphère comme ſa ſurface à la ſurface de la ſphère. Il eſt clair que c' eſt toujours le même raiſonnement qui nous ſuit par-tout.

Je ne m' étendrai pas davantage ſur une matière où il y a tant de cas, qu' il eſt difficile de les ranger par ordre, ſans qu' il en échappe une infinité: ce ſont d' ailleurs des bagatelles en Géométrie, & la Societé Royale à qui j' oſe les préſenter, à quelche choſe de mieux à faire. Si cependant elle

veut

veut bien ſe ſouvenir que j' ai l' honneur d' être un de ſes membres, en quoi conſiſte toute ma gloire, j' eſpere qu' elle pardonnera mon audace, & qu' elle aura la bontè de corriger mas fautes; ainſi qu' elle en a le droit.

Addition ſur les figures inſcrites dans le Cercle, & ſur les ſolides inſcrits dans la Sphère.

Voici encore deux théorèmes qui me paroiſſent utiles, aux quels perſonne, que je ſache, n' avoit juſqu' ici fait attention: ils ont pour objet les figures inſcrites dans le cercle, & les ſolides inſcrits dans la Sphère. Quoiqu' ils n' aient pas peut-être toute l' univerſalité qu' on pourroit ſouhaiter, il ſont cependant d' une aſſez grande étendue: la démonſtration en eſt fort ſimple, ce qui n'en doit pas diminuer le prix.

THEOREME I.

Un Polygone inſcrit dans un cercle ne peut jamais être à ce même cercle comme ſon périmètre à la circonférence, ſi ce polygone eſt tel qu' on y puiſſe inſcrire un autre cercle.

DEMONSTRATION.

Il eſt évident par ce qui a été démontré ci-deſſus, que le cercle que l' on ſuppoſe pouvoir être inſcrits dans le polygone, ſera à ce même polygone comme ſa circonférence au périmètre du polygone. Donc ſi le polygone étoit au cercle dans le quel il eſt inſcrit comme ſon périmètre à la circonference de ce cercle, il s' enſuivroit que le premier cercle ſeroit au ſecond comme la circonférence à la circonférence; ce qui eſt impoſſible.

COROLLAIRE.

Y' Ai prouvè en peu de mots qu' aucun polygone regulier, ni aucun triangle, même irregulier, étant inſcrit dans un cercle, ne ſauroit être à ce même cercle comme ſon périmètre à la circonférence; car on peut toujours inſcrire un autre cercle dans un polygone régulier quel qu' il ſoit, ainſi que dans un triangle quelconque.

THEO-

THEOREME II.

Un corps inſcrit dans une Sphère ne peut jamais être à cette Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère, ſi ce corps eſt tel qu' on y puiſſe inſcrire une autre Sphère.

DEMONSTRATION.

IL eſt clair par ce qu' on a dèmontré ci-deſſus, que la Sphère que l' on ſuppoſe ici pouvoir être inſcrite dans le ſolide, ſera à ce ſolide comme ſa ſurface à la ſurface du ſolide. Donc ſi le ſolide étoit à la ſphère dans laquelle il eſt inſcrit comme ſa ſurface à la ſurface de cette ſphère, il s' enſuivroit que les deux ſphères ſeroient entr' elles comme leurs ſurfaces; ce qui eſt impoſſible.

CORROLLAIRE I.

AUcun corps régulier inſcrit dans une Sphère, ne peut jamais être a cette ſphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère; car la ſphère peut être inſcrite dans chacun des cinq corps reguliers.

COROLLAIRE II.

IL en eſt de même du cylindre équilatéral & du cône droit par la même raiſon.

Je ne m' étendrai point ſur les autres ouvertures que peuvent nous donner ces deux propoſitions : on voit qu' elles ſont fort étendue ; & qu' on en peut tirer beaucoup d' autres corollaires avec une extrême facilité.

Fig. 2.

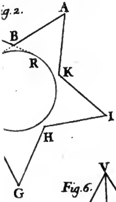


Fig. 3.

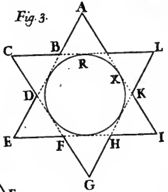
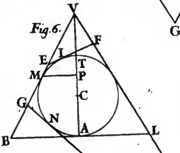


Fig. 6.



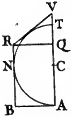


Fig. 7.

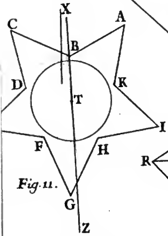


Fig. 11.

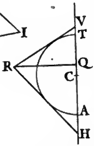


Fig. 9.

Digitized by Google

OPUSCULUM

De ſeparandis indeterminatis.

QUanti momenti ſit, quanti operis, quantumque ad æquationum differentialium integrationes, quibus ſubtiliſſimæ totius algebræ quæſtiones continentur, indeterminatarum ſeparatio valeat, nemo eſt, ut arbitror, qui ignoret. Itaque mirandum, ſemper eſſe exiſtimavi, vel potius dolendum, quod cum alios nobiliſſimæ illius ſcientiæ locos ſcriptores tam multi certiſſimis præceptis, exquiſitiſſimaque doctrina illuſtraverint, hunc unum quaſi deſertum, & omni prope arte vacuum, abiectumque reliquerint. Etenim, ſi præclaram illam excipimus regulam, quam multos jam ab hinc annos vir graviſſimus, & de univerſa algebra optime meritus, Gabriel Manfredius, Præceptor meus, Venetiis edidit, in tomo XVIII. diarii literatorum, anno MDCCXIV; quæque in iis æquationibus valet, in quibus productum, quod variabilibus fit in quovis propoſitæ æquationis termino, eaſdem dimenſiones habet; vix unam, aut alteram habemus præceptionem, quæ ſeparandarum indeterminatarum viam aliquam monſtret. Cum ergo ſuperioribus his menſibus, longo ſane intervallo, ad algebram me revocaſſem (pudebat enim ab illo ſtudio jamdudum me abeſſe, quod academia ab eo maxime, qui a ſecretis ſit, qui-

que

que acta deſcribere debeat, ſuo quaſi jure poſtulet) hæſi præſertim in eo, quem dixi, loco, non ut novi aliquid invenirem, (quis enim ego ſum, ut tam brevi præſertim ſtudio aſpirare poſſim ad hanc gloriam?) ſed ut viderer feciſſe aliquid, vel certe voluiſſe.

In hoc ergo ſtudio cum ſeparandarum indeterminatarum rationem aliquam perveſtigarem, omnemque aditum quærerem, theorema neſcio quod mihi occurrit, ut primum viſum eſt, non inelegans, quodque ſpem aliquam oſtendere videbatur. Id ego quidem regulam appellare non auſim, quamquam ipſum regulam, credo, ſe eſſe putat; nec ſibi ſatis placere poſſe videtur, niſi pro regula habeatur. Sed de hoc dicam poſtea. Nunc theorema ipſum, utcumque eſt, aperio. Quod ut brevius faciam, atque ea, quæ volo, commodius explicem, duo ante moneo.

Primum. Propoſita æquatione quavis, putabo in unoquoque ejus termino utramque variabilem y, & x reperiri; nam ſi cui termino aberit vel y, vel x, putabo adeſſe y^0, vel x^0.

Deinde numerum exponentem, quem in unoquoque æquationis termino habebit variabilium alterutra, vocabo e; ſummamque exponentium amborum, quos in eodem termino habebunt variabiles ambæ, vocabo f. Quo ſatis intelligitis, numeros e, & f in eadem æquatione non eoſdem ubique fore, ſed alios in terminis aliis.

Jam vero theorema ipſum expono. Propoſita æquatione differentiali, exſtet numerus quipiam r ejuſ-

eſuſmodi, ut, ſi ſit e exponens litteræ y, fiatque in quovis termino habente dx numerus $re+f$, in quovis alio numerus $re+r+f$; ſint numeri hi duo perpetuo æquales; vel etiam exſtet numerus alius quipiam r eſuſmodi, ut, ſi ſit e exponens litteræ x, fiatque in quovis termino habente dy numerus $re+f$, in alio quovis numerus $re+r+f$, ſint item numeri hi duo perpetuo æquales; affirmo jam indeterminatarum ſeparationem expeditiſſimam fore, ſi numerorum r alterutrum adhibueris ad hunc modum.

Sume tibi variabilem quampiam z arbitratu tuo. Tum pone vel $y=zx^{r+1}$, adhibens primum e duobus, quos dixi, numeris r; vel $x=zy^{r+1}$, adhibens alterum. Subſtitutionibus enim rite factis ſic æquatio tota vertetur, ut iam ſeparare indeterminatas quivis poſſit vel indoctus. Eſt ergo in duobus numeris r, ſi modo inveniantur, ſpes omnis: quorum alter ſatisfaciet litteram y expellendo, alter expellendo litteram x; itaque illum per y, hunc per x utilem appellabo.

Atque hæc profecto theoremati ſatis eſſe poterant, ſi illud quidem theorematis nomine contentum eſſet; ſed eſt paullo ambitioſius, nec ſatis habet docuiſſe aliquid; vult etiam præcipere, & regularum more, ut ita dicam, imperare. Quod tamen fruſtra faciet, niſi numeri, quem dixi, r inveniendi ratio patefiat. Si enim numerum hunc invenire neſcias, monuiſſe aliquid theorema videbitur, nihil ad praxin contuliſſe. Hujus ego numeri inveniendi viam paucis

cis aperio. Vos animum diligenter attendite.

Propoſita æquatione terminos ejus duos ſelige, quorum alter habeat dx, alter dy; nam bini tales numquam aberunt. Atque in termino habente dx puta exponentem litteræ y eſſe m, litteræ x eſſe p; in termino habente dy exponentem litteræ y eſſe n, litteræ x eſſe q. Tum numeros duos tibi finge, primum ex hac formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$, alterum ex hac $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$. Duobus his numeris comparatis utrumque experire, ſi tibi forte in æquatione propoſita pro numero r eſſe poſſit; ideſt an, adhibitus in locum r, numeros $re+f$, $re+r+f$ æquales, quemadmodum ſupra dixi, ubique efficiat; primus quidem poſito e exponente litteræ y, alter poſito e exponente litteræ x. Si experimentum reſponderit, inventus jam tibi erit numerus r, quem quærebas, ſive per y utilis, ſive per x; ſin minus, inveniendi ſpes erit nulla. Sic quæſtionem mathematicorum more ſolutam habebis, re vel confecta, vel deſperata.

Hæc cum ego, Sodales optimi, animadvertiſſem, & quo modo numerus r inveniri poſſet, comperiſſem, tum demum, re ipſa adductus, non dubitavi theorema illud meum in præceptis ponere, & novam regulam, vixque ſibi ſatis fidentem, inter antiquas illas graviſſimas, quæ jamdiu in algebra regnant, quaſi adoleſcentulam introducere; eamque, quo eſſet audacior, adnotationibus illuſtravi quibuſdam, ne quid ei deeſſet, vel ad uſum, vel ad ornatum. Has ſtatim expono.

Pri-

Frimum. Numerus, quem e formulis duces, cujuſcumque ſit generis, utilis eſſe poterit; ſive ergo poſitivus fuerit, ſive negativus, ſive integer, ſive fractus, ſive rationalis, ſive irrationalis genus non te moretur. Regula enim noſtra numeros omnes complectitur; nullum reſpuit. Quamquam irrationalis numquam erit, niſi ſi æquatio propoſita exponentem quempiam irrationalem ipſa habeat.

Secundo. Quoniam e duabus formulis, quas ſupra poſui, numeri duo duci poſſunt, ſcire convenit vel utrumque utilem futurum eſſe, vel neutrum. Quod ſi ambo utiles ſint; tu autem unum inveneris; quamvis ad ſeparandas indeterminatas hic unus ſatis ſit, me auctore tamen quæres etiam alterum, etenim cum ſint plerumque inæquales, verendum eſt, ne, ſi alterum negligis, negligas commodiorem.

Fieri autem poteſt, ut numerus, quem e formulis noſtris duces, zero multis modis implicetur, quod ſi accidat, videbitur regula, quam tradidimus, obſcurior fieri. Eſt ergo in his caſibus per adnotationes, quas ſtatim proponam, illuſtranda.

Quamquam ſi numerus, ductus e formulis, ipſe zerum fuerit, nihil turbabit; etenim (ſi modo utilis ſive per x, ſive per y inveniatur) in locum r adhiberi poterit, eoque adhibito procedent perbelle omnia.

Hic loci præterire non debeo rem notatu digniſſimam: præclare ſcilicet, ſi numerus ipſe r zerum fuerit, inter meam hanc regulam, eamque, quam o-

 lim

lim Manfredius tradidit, convenire. Enimvero numerus r numquam mihi in zerum abit, niſi ſi æquatio propoſita ea ſit, in qua dimenſiones productorum, quæ variabilibus fiunt, in terminis omnibus ſint æquales. Quibus æquationibus Manfredius per ſuam illam regulam conſuluit, eamque ſubſtitutionem propoſuit, ad quam regula quoque noſtra nos trahit, ut videantur regulæ ambæ hoc loco conjungi, amplexarique ſe mutuo, auctores ſuos imitatæ.

Porro interdum fiet, ut numerus, qui e formulis ductus fuerit, prodeat ſub ſpecie $\frac{0}{0}$, in quo ſane obſcuritas erit ſumma. Quis enim eſt numerus, qui non ſub illa latebra abſcondi poſſit? Verum obſcuritas tolletur omnis, ſi duorum terminorum, qui primum ex æquatione propoſita ſelecti fuerant, abjecto altero, alius, ex eadem æquatione depromtus, in ejus locum ſubſtituatur, & numerus r quæratur iterum. Si qui enim numerus erit utilis, ſub illa zeri obſcuritate in utroque terminorum pari recondi non poterit.

Atqui numerus, qui e formulis ductus fuerit, ſic zero interdum implicabitur, ut infinitum ſe eſſe oſtendat; puta, ſi prodierit $\frac{1}{0}$. Si quando id accidat, hæc tene: Cum e duabus, quas poſui, formulis numeri duo duci poſſint, ſi horum alter fuerit $\frac{1}{0}$, numquam non erit alter -1; & viciſſim. Cum ergo ad ſeparandas indeterminatas utervis numerus adhiberi poſſit, facile declinabis infinitatem illam $\frac{1}{0}$, ſi numerum alterum -1 adhibueris.

Eſt

Eſt porro aliquid in hoc ipſo numero — 1 diligenter animadvertendum, quod expono breviter. Quamvis numerus — 1 e formulis ductus fuerit, iſque ſe utilem præbeat vel per *y*, vel per *x*, ubi tamen ad ſeparandas indeterminatas veneris, ſubſtitutio fruſtra erit. Quæ res te monebit æquationem propoſitam ejus formæ eſſe, ut quivis vel indoctus ſeparare indeterminatas jam inde ab initio potuerit labore nullo. Quod facile ſenties, ſi ad æquationem ipſam redieris, eamque inſpexeris diligentius. Quo videtur numerus ille — 1 prodiiſſe, ut mathematici, non induſtriam juvaret, ſed imprudentiam reprehenderet.

Neque vero improbandam regulam eſſe arbitror quod uno in caſu auxilium mathematico ferre neget; etenim nec mathematicus illo in caſu, ſi paullo attentior ſit, auxilio opus habet, & ipſa in caſibus aliis omnibus, qualiſcumque numerus *r* prodeat, præſto eſt; quo magis illi ignoſcendum, ſi in uno ſit renuens. Quid quod ſeparationem indeterminatarum facillime expedit, & breviſſime? Quid quod eamdem expedit, nulla nec numerorum, nec conſtantium, ſi quibus numeris, aut conſtantibus propoſitæ æquationis termini multiplicentur, ratione habita?

At vereor, ne qui veſtrum regulæ, quam adhuc tradidi, illud vitio det, quod in æquationibus, in quibus ipſa valere ſe profitetur, conditionem requirat vix umquam exſpectandam. Si enim æquationum millia proponantur, quota quæque erit, in qua nu-

meri illi $re+f$, $re+r+f$ ubique æquales ſint? Quod cum ſperari vix poſſit, videtur ſane regula non niſi in pauciſſimis valere poſſe. Hanc ego rationem, antequam finem dicendi facio, minuendam mihi eſſe arbitror; eoque magis, quod cum eadem mihi quoque in mentem veniſſet, initio quidem ita commovit, ut inventam regulam prope abjecerim, nec ſatis memoria dignam exiſtimaverim. Poſtea vero cum rem totam attentius conſideraſſem, mecum ipſe cogitans, quid id ſuperbiæ eſt, dixi, ut cum in difficillimo loco verſer, eoque qui regulis prope omnibus careat, hanc, quæ ſe obtulit, contemnam, propterea quod juvet in paucis; quaſi non multo ſit melius juvari aliquando, quam numquam? Quamquam cum regula hæc, quam pono, Manfredianæ illi clariſſimæ, quæ utique in æquationibus ſatis multis valet, conjungatur, eamque contineat; cur non ex illa tam glorioſa conjunctione laudem aliquam ſibi vindicet? Quod ſi valet in omnibus iis caſibus, in quibus Manfrediana valet, quæ ejus eſt culpa, ſi valeat etiam in paucis aliis? Qui tamen non ita pauci ſunt, ut, ſi colligere quis velit, non illorum multitudine obruatur. Poſſumus enim, dato quovis numero r, infinitas æquationes condere, in quibus ex ea, quam poſui, regula indeterminatarum ſeparatio ſit facillima; ut jam numero r infinitis modis variato, infiniti ordines eidem regulæ ſubjiciantur æquationum infinitarum. Sed mathematicis iſtis tanta eſt cum infinitate conſuetudo, ac prope familiaritas, ut

non

non magnum aliquid dixiſſe nos putent, ſi quid infinitum dixerimus; & plane fieri poſſe intelligunt, ut quamvis exſiſtere æquationes infinitæ poſſint, quibus certa conditio inſit, illarum tamen, in quæſtionibus tractandis, vix ulla umquam occurrat; quod an hic accidat, non niſi tentando cognoſci poteſt. Ego quidem affirmare vere poſſum, me in æquationibus quibuſdam, in quas caſu incidi, experimentum regulæ interdum feciſſe; ac licet in pauciſſimis fecerim, rem tamen ſucceſſiſſe in non nullis. Volui etiam experimentum certius capere atque illuſtrius. Cum ſuccurriſſet, præſtantiſſimam feminam, & cum celeberrimis mathematicis comparandam, Mariam Agneſiam in præclaro illo ſuo inſtitutionum analyticarum opere de ſeparandis indeterminatis copioſe differere, facile credidi, noluiſſe illam committere, ut obſcuriſſimum difficillimumque locum non exemplis illûſtraret quamplurimis. Neque me conjectura fefellit. Etenim, libro in manus ſumto, æquationes inveni permultas, quas mulier doctiſſima ad ſeparandas, ſi fieri poſſit, indeterminatas proponit. Quod illa quidem, æquationes eaſdem multis modis verſans, & modo unum artificium adhibens modo aliud, nihilque intentatum relinquens, ut eſt incredibili ſummoque ingenio, ſic tandem perficit, ut plane oſtendat, induſtriam ſibi plus profuiſſe, quam præcepta, atque artem. Ego autem ex æquationibus illis, ut ſe ſe offerebant, ſtatim exſcripſi ſexdecim, maxime expeditas; viſurus poſtea, an eſſet illarum aliqua, quæ

quæ regulæ, quam in hoc ſermone vobis propoſui, ſubjiceretur. Quid plura? Sexdecim æquationibus ad calculos revocatis res ſucceſſit in ipſis undecim; atque ita ſucceſſit, ut neque præparare æquationes, neque terminos huc, atque illuc transferre opus fuerit, neque addere quidquam, neque demere, neque illis contineri finibus, quibus ſagax femina æquationes interdum coercet ſuas; in quibus, ſi regulam a nobis modo propoſitam tenuiſſet, ingenium illa quidem oſtendiſſet minus, ſed indeterminatas ſeparaviſſet facilius. De his hactenus. Omnium, quæ adhuc diſſerui, exempla paucula deſcripta habeo, quæ vobis relinquam, ut ſi qui velint, poſſint legere.

EXEMPLUM I.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^5 y\, dy + x^9\, dy + y^3\, dx + yy\, x^4\, dx = 0.$$

Seligo duos terminos; quorum alter habet dx, alter dy; nempe

$$y^3\, dx. \qquad\qquad x^5 y\, dy.$$

Tum quæro, qui numerus prodeat ex prima duarum illarum formularum, quas ſupra poſui, ideſt $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$; ad hunc modum. Quoniam m denotat exponentem litteræ y, & p exponentem litteræ x in termino habente dx; n vero denotat expo-

ponentem litteræ y in termino habente dy, & q exponentem litteræ x in eodem termino; erit $m = 3$. $p = 0$. $n = 1$. $q = 5$, & prodibit e formula numerus 3. Quæro jam igitur, an numerus 3 utilis ſit per y. Et eſt ſane; nam ſi fiat $r = 3$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens litteræ y, & f ſumma exponentium litterarum y & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re + f = 12$; & pariter in quovis termino habente dy, invenietur $re + r + f = 12$.

Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = 3$, ponaturque $y = z x^{r+1}$, ideſt $y = z x^4$. Et ſane cum ſit $y = z x^4$; erit $yy = zz x^8$, & $y^3 = z^3 x^{12}$, & $dy = x^4 dz + 4 z x^3 dx$, factiſque ſubſtitutionibus æquatio propoſita vertetur in hanc $x^{13} z dz + 5 zz x^{12} dx + x^{13} dz + 4 z x^{12} dx + z^3 x^{12} dx = 0$ quam ſi totam dividas per x^{12}, conjectis in unam partem terminis omnibus habentibus dx, in alteram terminis omnibus habentibus dz, facile colliges $\frac{dx}{x} = \frac{-z dz - dz}{z^3 + 5 zz + 4 z}$. Sic ſeparatas habebis indeterminatas per numerum 3 ductum ex prima formula.

Atqui ſeparari etiam potuiſſent per numerum $-\frac{3}{4}$, qui prodit ex formula ſecunda $\frac{n - m + q - p}{p - q + 1}$. Etenim numerus $-\frac{3}{4}$, ductus ex hac ſecunda formula, invenitur utilis per x; quippe quia, ſi fiat $r = -\frac{3}{4}$,

& in

& in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino, habente dy, invenietur $re+f=\frac{9}{4}$, & pariter in quovis termino, habente dx, invenietur $re+r+f=\frac{9}{4}$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=-\frac{3}{4}$, ponaturque $x=zy^{r+1}$, ideſt $x=zy^{\frac{1}{4}}$. Et ſane ſubſtitutionibus rite factis, æquatio propoſita vertetur in hanc $z^9 y^{\frac{9}{4}}dy+\frac{5}{4}z^5 y^{\frac{9}{4}}dy+y^{\frac{13}{4}}dz+\frac{5}{4}zy^{\frac{9}{4}}dy+y^{\frac{13}{4}}z^4dz=0$ quam ſi totam dividas per $y^{\frac{9}{4}}$, conjectis in unam partem terminis omnibus habentibus dy, in alteram terminis omnibus habentibus dz, facile colliges $\frac{dy}{y}=\frac{-z^4dz-dz}{z^9+\frac{5}{4}z^5+\frac{5}{4}z}$.

EXEMPLUM II.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^3ydy+ydx+xdy=0.$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$ydx. \qquad x^3ydy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in ſuperiore exemplo, erit $m=1$. $p=0$. $n=1$. $q=3$; atque ex prima formula

$n-m$

$\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicitur numerus -3. Invenies autem numerum -3 utilem per y; quippe quia ſi fiat $r=-3$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino habente dx invenietur $re+f=-2$; & pariter in quovis termino habente dy invenietur $re+r+f=-2$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=-3$, ponaturque $y=zx^{r+1}$, ideſt $y=zx^{-2}$. Quod facile intelliget, qui experiri voluerit.

Neque minus ſeparari poterunt indeterminatæ per numerum $-\frac{3}{2}$, qui ducitur ex ſecunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$. Etenim numerus $-\frac{3}{2}$, ductus ex hac ſecunda formula, erit utilis per x, quippe quia ſi fiat $r=-\frac{3}{2}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino habente dy invenietur $re+f=-\frac{1}{2}$, & pariter in quovis termino habente dx invenietur $re+r+f=-\frac{1}{2}$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=-\frac{3}{2}$, ponaturque $x=zy^{r+1}$, ideſt $x=zy^{-\frac{1}{2}}$. Nec erit longum experiri.

EXEMPLUM III.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^{\frac{1}{2}}dx + y^{\frac{4}{3}}dx + x^{\frac{3}{4}}ydy = y^3dy.$$

Hanc æquationem ex præclariſſimis Agneſiæ Inſtitutionibus depromſi. Ad ſeparandas vero indeterminatas modo meo, duos terminos ſeligo, quorum alter habet dx, alter dy; nempe

$$x^{\frac{1}{2}}dx. \qquad y^3dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m = 0$. $p = \frac{1}{2}$ $n = 3$. $q = 0$; atque ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicietur numerus $-\frac{5}{8}$. Invenies autem numerum $-\frac{5}{8}$ utilem per y; quippe quia, ſi fiat $r = -\frac{5}{8}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino habente dx invenietur $re + f = \frac{1}{2}$; & pariter in quovis termino habente dy invenietur $re + r + f = \frac{1}{2}$.

Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = -\frac{5}{8}$, ponaturque $y = zx^{r+1}$, ideſt $y = zx^{\frac{3}{8}}$.

Et ſane factis rite ſubſtitutionibus æquatio propoſita vertitur in hanc $x^{\frac{1}{2}}dx + z^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{2}}dx + x^{\frac{3}{2}}zdz + \frac{3}{8}zzx^{\frac{1}{2}}dx = x^{\frac{3}{2}}z^3dz + \frac{3}{8}z^4x^{\frac{1}{2}}dx$ quam ſi totam di-

dividas per $x^{\frac{3}{2}}$, habebis $dx + z^{\frac{4}{3}} dx + xz\,dz + \frac{3}{8} zz\,dx = xz\,dz + \frac{3}{8} z^4\,dx$ ubi, conjectis in unam partem omnibus terminis habentibus dx, in alteram omnibus terminis habentibus dz, indeterminatas ſeparare nihil negotii erit.

Neque minus ſeparari poterunt indeterminatæ per numerum $\frac{5}{3}$, qui ducitur ex ſecunda formula $\frac{n - m + q - p}{p - q + 1}$, quique erit utilis per x. Etenim ſi fiat $r = \frac{5}{3}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y, jam in quovis termino habente dy invenietur $re + f = 3$, & pariter in quovis termino habente dx invenietur $re + r + f = 3$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = \frac{5}{3}$, ponaturque $x = zy^{r+1}$, ideſt $x = zy^{\frac{8}{3}}$. Id non proſequar; abſolvuntur enim omnia eodem ſemper modo.

EXEMPLUM IV.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$a\,dy = \frac{fy\,dx}{x} + yy\,dx.$$

Hanc quoque ex Agneſia depromſimus; quamquam eamdem æquationem ſcribere nobis licet etiam ad

 hunc

hunc modum

$$a\,dy - fy\,x^{-1}dx + yy\,dx$$

vel etiam

$$a\,x\,dy = fy\,dx + yy\,x\,dx$$

Scriptionem hanc commodiſſimam ſequens eligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy; nempe

$$yy\,x\,dx. \qquad a\,x\,dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m = 2$. $p = 1$. $n = 0$. $q = 1$.; atque ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicietur numerus -2. Erit autem numerus -2 utilis per y; quippe quia, ſi fiat $r = -2$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino habente dx invenietur $re + f = -1$; & pariter in quovis termino habente dy, invenietur $re + r + f = -1$. Erit ergo indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = -2$, ponaturque $y = z\,x^{r+1}$, ideſt $y = z\,x^{-1}$. Et ſane cum ſit $y = z\,x^{-1}$, erit $yy = zz\,x^{-2}$, & $dy = x^{-1}dz - z\,x^{-2}dx$, quibus ſubſtitutionibus factis habebis

$$a\,dz - a\,z\,x^{-1}dx = fz\,x^{-1}dx + zz\,x^{-1}dx.$$

Et tandem

Digitized by Google

$$x^{-1}dx = \frac{dx}{x} = \frac{a\,dz}{zz + a + fz}.$$

Neque minus ſeparabuntur indeterminatæ per numerum -2, qui pariter elicitur ex ſecunda formula $\frac{n - m + q - p}{p - q + 1}$, quique eſt utilis per x; quippe quia, ſi fiat $r = -2$; & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino habente dy invenietur $re + f = -1$, & pariter in quovis termino habente dx invenietur $re + r + f = -1$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = -2$, ponaturque $x = zy^{r+1}$, ideſt $x = zy^{-1}$.

EXEMPLUM V.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^4 dy + y^7 x^{-3} dx + y^4 dy = 0.$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy,

$$y^7 x^{-3} dx. \qquad x^4 dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m = 7$. $p = -3$. $n = 0$. $q = 4$; atque ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicietur numerus 0. Eſt autem nu-

me-

merus o utilis per y; quippe quia, ſi fiat $r=0$; & in ſingulis propoſitæ equationis terminis vocetur e exponens litteræ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re+f=4$; & pariter in quovis termino, habente dy, invenietur $re+r+f=4$. Erit ergo indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=0$, ponaturque $y=zx^{r+1}$, ideſt $y=zx$.

Si ſequi velis formulam ſecundam $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, elicies pariter numerum o, quem invenies utilem per x; ac facile indeterminatas ſeparabis ponendo $x=zy$. Id quod clariorem explicationem non requirit.

EXEMPLUM VI.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$y^3dx+xyydy+x^4ydy+x^7dy=0.$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$y^3dx. \qquad xyydy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m=3$. $p=0$. $n=2$. $q=1$; atque ex prima formula

$n-m$

$\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicietur $\frac{8}{0}$; in quo eſt ſumma obſcuritas. Igitur abjicio terminum $xyydy$, & in ejus locum aſſumo $x^7 dy$; ac mihi propono duos terminos

$$y^3 dx. \qquad x^7 dy.$$

in quibus cum ſit $m=3.\ p=0.\ n=0.\ q=7$, ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicio numerum 2. Eſt autem numerus 2 utilis per y, quippe quia, ſi fiat $r=2$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re+f=9$; & pariter in quovis termino, habente dy, invenietur $re+r+f=9$, Erit ergo indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=2$, ponaturque $y=zx^{r+1}$, ideſt $y=zx^3$. Separationem ipſam non perſequor, nam vel minus peritis facillimam ſe præbebit.

Neque minus ſeparabuntur indeterminatæ per numerum $-\frac{2}{3}$, qui elicitur ex ſecunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique erit utilis per x; etenim ſi fiat $r=-\frac{2}{3}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino, habente dy, invenietur $re+f=\frac{7}{3}$, & pariter in quovis termino, habente dx, invenietur $re+r+f=\frac{7}{3}$. Erit ergo indeterminatarum ſeparatio ex-

peditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = -\frac{2}{3}$, ponaturque $x = zy^{r+1}$, ideſt $x = zy^{\frac{1}{3}}$.

EXEMPLUM VII.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione.

$$y^t dy = c x^u dy + e y x^{u-1} dx.$$

Hanc ex Agneſia depromſimus; quamquam ipſa pro t, & u, utitur literis r, & n, quas nos ad alium uſum ſepoſuimus. Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$y x^{u-1} dx. \qquad y^t dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m = 1$. $p = u - 1$. $n = t$. $q = 0$; atque ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicietur numerus $\frac{u - t}{t}$. Eſt autem numerus $\frac{u - t}{t}$ utilis per y; quippe quia, ſi fiat $r = \frac{u - t}{t}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re + f = \frac{ut + u - t}{t}$, & pariter in quovis termino, habente dy, invenietur $re + r + f = \frac{ut + u - t}{t}$. Erit ergo indetermina-

tarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = \frac{u-t}{t}$, ponaturque $y = zx^{r+1}$, ideſt $y = zx^{\frac{u}{t}}$. Et ſane ſubſtitutionibus rite factis æquatio propoſita vertetur in hanc

$$x^{\frac{ut+u}{t}} z^t dz + \frac{u}{t} z^{t+1} x^{\frac{ut+u-t}{t}} dx = cx^{\frac{ut+u}{t}} dz$$

$$+ \frac{\overline{cu+et}}{t} z x^{\frac{ut+u-t}{t}} dx$$ quam ſi totam dividas per $x^{\frac{ut+u}{t}}$, habebis

$$z^t dz + \frac{u}{t} z^{t+1} x^{-1} dx = c\,dz + \frac{\overline{cu+et}}{t} z x^{-1} dx$$

unde

$$x^{-1} dx = \frac{dx}{x} = \frac{ct\,dz - tz^t dz}{uz^{t+1} + \overline{cu+etz}}.$$

Neque minus ſeparabuntur inderminatæ per numerum $\frac{t-u}{u}$, qui elicitur ex ſecunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique erit utilis per x. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = \frac{t-u}{u}$, ponaturque $x = zy^{r+1}$, ideſt $x = zy^{\frac{t}{u}}$.

peditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = -\frac{2}{3}$, ponaturque $x = zy^{r+1}$, ideſt $x = zy^{\frac{1}{3}}$.

EXEMPLUM VII.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione.

$$y^t dy = c x^u dy + e y x^{u-1} dx.$$

Hanc ex Agneſia depromſimus; quamquam ipſa pro t, & u, utitur literis r, & n, quas nos ad alium uſum ſepoſuimus. Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$y x^{u-1} dx. \qquad y^t dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m = 1$. $p = u - 1$. $n = t$. $q = 0$; atque ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicietur numerus $\frac{u - t}{t}$. Eſt autem numerus $\frac{u - t}{t}$ utilis per y; quippe quia, ſi fiat $r = \frac{u - t}{t}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re + f = \frac{ut + u - t}{t}$, & pariter in quovis termino, habente dy, invenietur $re + r + f = \frac{ut + u - t}{t}$. Erit ergo indetermina-

ta-

tarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = \frac{u-t}{t}$, ponaturque $y = z x^{r+1}$, ideſt $y = z x^{\frac{u}{t}}$. Et ſane ſubſtitutionibus rite factis æquatio propoſita vertetur in hanc

$$x^{\frac{ut+u}{t}} z^t dz + \frac{u}{t} z^{t+1} x^{\frac{ut+u-t}{t}} dx = c x^{\frac{ut+u}{t}} dz$$

$$+ \frac{\overline{cu+et}}{t} z x^{\frac{ut+u-t}{t}} dx$$ quam ſi totam dividas per $x^{\frac{ut+u}{t}}$, habebis

$$z^t dz + \frac{u}{t} z^{t+1} x^{-1} dx = c dz + \frac{\overline{cu+et}}{t} z x^{-1} dx$$

unde

$$x^{-1} dx = \frac{dx}{x} = \frac{c t dz - t z^t dz}{u z^{t+1} + \overline{cu+etz}}.$$

Neque minus ſeparabuntur inderminatæ per numerum $\frac{t-u}{u}$, qui elicitur ex ſecunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique erit utilis per x. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = \frac{t-u}{u}$, ponaturque $x = z y^{r+1}$, ideſt $x = z y^{\frac{t}{u}}$.

EXEMPLUM VIII.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^{\frac{4}{7}} dx + y^{\frac{4}{7}} dx + xy^{\frac{-3}{7}} dy = 0 .$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$y^{\frac{4}{7}} dx. \qquad xy^{\frac{-3}{7}} dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur litteræ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m = \frac{4}{7}$, $p = 0$. $n = -\frac{3}{7}$. $q = 1$, atque ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicietur $\frac{0}{0}$. Igitur abjicio terminum $y^{\frac{4}{7}} dx$, & in ejus locum aſſumo $x^{\frac{4}{7}} dx$, ac mihi propono duos terminos

$$x^{\frac{4}{7}} dx. \qquad xy^{\frac{-3}{7}} dy.$$

in quibus cum ſit $m = 0$. $p = \frac{4}{7}$. $n = -\frac{3}{7}$. $q = 1$; ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicio numerum o. Eſt autem numerus o utilis per y, quippe quia, ſi fiat $r = 0$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e, exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re + f = \frac{4}{7}$, & pariter in quovis termino, habente dy, invenietur $re + r + f = \frac{4}{7}$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabi-

bili quapiam z, fiat $r=0$, ponaturque $y=zx^{r+1}$, ideſt $y=zx$.

Si ſequi velis formulam ſecundam $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, elicies ex ea pariter numerum 0, qui erit utilis per x; ac facile indeterminatas ſeparabis, ponendo $x=zy$; quod quivis per ſe facile intelliget.

EXEMPLUM IX.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$y^3 x\,dx = y^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\,dx + x^{4+2\sqrt{5}}\,dy.$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$y^3 x\,dx. \qquad x^{4+2\sqrt{5}}\,dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m=3.\,p=1.\,n=0.\,q=4+2\sqrt{5}$; atque ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$, elicietur numerus $\sqrt{5}$. Eſt autem numerus $\sqrt{5}$ utilis per y; quippe quia, ſi fiat $r=\sqrt{5}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re+f=4.+3\sqrt{5}$; & pariter in quo-

quovis termino, habente dy, invenietur $re+r+f=4+3\sqrt{5}$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=\sqrt{5}$; ponaturque $y=zx^{r+1}$, ideſt $y=z\,x^{1+\sqrt{5}}$.

Et ſane cum ſit $y=zx^{1+\sqrt{5}}$, erit $y^3=z^3 x^{3+3\sqrt{5}}$, & $y^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}=z^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}x^{4+3\sqrt{5}}$, & $dy=x^{1+\sqrt{5}}dz+\overline{1+\sqrt{5}}\,z\,x^{\sqrt{5}}dx$, & factis rite ſubſtitutionibus æquatio propoſita vertetur in hanc

$$z^3\,x^{4+3\sqrt{5}}dx=z^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}x^{4+3\sqrt{5}}dx+x^{5+3\sqrt{5}}dz+\overline{1+\sqrt{5}}\,z\,x^{4+3\sqrt{5}}dx$$

quam ſi totam dividas per $x^{4+3\sqrt{5}}$, habebis

$$z^3\,dx=z^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}dx+x\,dz+\overline{1+\sqrt{5}}\,z\,dz$$

unde

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z^3-\overline{1+\sqrt{5}}\,z-z^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}}.$$

Neque minus ſeparabuntur indeterminatæ per numerum $\frac{-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, qui elicitur ex ſecunda formula

$n-m$

$\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique erit utilis per x; etenim ſi fiat $r=\frac{-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino, habente dy, invenietur $re+f=\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$; & pariter in quovis termino, habente dx, invenietur $re+r+f=\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=\frac{-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$, ponaturque $x=zy^{r+1}$, ideſt $x=zy^{\frac{1}{1+\sqrt{5}}}$.

EXEMPLUM X.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$y^t\, dy=\frac{2x\,dy-y\,dx}{xx}.$$

Hæc in inſtitutionibus doctiſſimæ Agneſiæ occurrit, quamquam litera, quæ mihi eſt t, Agneſiæ eſt r.

poſ-

Digitized by Google

Poſſumus autem eamdem æquationem ſcribere in hunc modum

$$x\,x\,y^t\,dy = 2\,x\,dy - y\,dx\,.$$

Hunc ſcribendi modum ſequens, ſeligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, puta

$$y\,dx\,. \qquad 2\,x\,dy\,.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m=1$. $p=0$. $n=0$. $q=1$, atque ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicietur $\frac{0}{0}$, ſpecies obſcuriſſima. Igitur abjicio terminum, quem ſelegi, $2\,x\,dy$, & in ejus locum aſſumo $x\,x\,y^t\,dy$; ac mihi jam propono duos terminos

$$y\,dx\,. \qquad x\,x\,y^t\,dy\,.$$

in quibus cum ſit $m=1$. $p=0$. $n=t$. $q=2$, ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicietur numerus $\frac{-1-t}{t}$. Eſt autem numerus $\frac{-1-t}{t}$ utilis per y; quippe quia, ſi fiat $r=\frac{-1-t}{t}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re+f=-\frac{1}{t}$, & pariter in quovis termino, ha-

ben-

Digitized by Google

bente dy invenietur $re+r+f=-\frac{1}{t}$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=\frac{-1-t}{t}$, ponaturque $y=zx^{r+1}$, ideſt $y=zx^{\frac{-1}{t}}$.
Et ſane, factis rite ſubſtitutionibus, æquatio propoſita vertetur in hanc $x^{\frac{t-1}{t}}z^t dz-\frac{1}{t}z^{t+1}x^{\frac{-1}{t}}$

$dx=2x^{\frac{t-1}{t}}dz-\frac{\overline{2+t}}{t}zx^{\frac{-1}{t}}dx$ quam ſi totam dividas per $x^{\frac{-1}{t}}$, habebis

$$xz^t dz-\frac{1}{t}z^{t+1}dx=2xdz-\frac{\overline{2+t}}{t}zdx$$

unde

$$\frac{dx}{x}=\frac{2tdz-tz^t dz}{\overline{2+t}z-z^{t+1}}$$

Neque minus ſeparabuntur indeterminatæ per numerum $-1-t$, qui elicietur ex ſecunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique erit utilis per x. Etenim ſi fiat $r=-1-t$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens litteræ x, & ſumma exponentium litterarum x, & y, jam in quovis termino, habente dy, invenietur $re+f=-t$; & pariter in quovis termino, habente dx, in-

invenietur $re + r + f = -t$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = -1 - t$, ponaturque $x = zy^{r+1}$, ideſt $x = zy^{-t}$, quod experiri longum non erit.

PRÆ-

Digitized by Google

PRÆFATIO

In qua Anonymi animadverſiones in Manfredii Ephemerides expenduntur.

LIbellum hunc, quem de præcipuis Manfredianarum Ephemeridum erroribus Anonymus neſcio quis Venetiis edidit, iterum emittere conſtituimus; nam quamvis nos ex illo Sociorum numero non fuerimus, qui ſuam operam Manfredio ad Ephemerides illas condendas contulerunt, tamen quia poſtea ſocietatem cum illis inivimus, aliaſque Ephemerides ſimul cum Euſtachio fratris noſtri filio, & Franciſco Vandello, & Joſepho Roverſio Manfredianarum exemplo condere, & futuros Planetarum curſus in duodecim ſequentes annos perſequi inſtituimus, e communi re facturum me eſſe exiſtimavi, ſi librum hunc typis iterum committens Anonymum ipſum primum publice (qui enim privatim poſſem, qui illum ne de facie quidem noverim?) rogarem, tum pauca quædam amice & familiariter admonerem. Et ſane Ephemerides novas edituri cur hominem non rogemus uſque adeo accuratum & diligentem in aliorum erroribus colligendis, emendandiſque? Nam cum in omnibus libris, tum vero maxime in Ephemeridibus, quæ totæ numeris, & ſupputationibus conſtat, illud

laborioſiſſimum eſt conficere quod in calce ſolet adjungi, *errata corrige*. Quod ſi uſquam occurrat, qui id laboris ſibi ſumere velit, næ illi maximæ habendæ ſunt gratiæ, quod id videlicet ſua ſponte ſuſcipiat, quod illi imponere, niſi mercede propoſita, nemo audeat. Quare Anonymum jam nunc rogamus, ut quando Ephemerides novas ſcribere ingreſſi ſumus, ubi eas typis commiſerimus, moleſtiſſimum illud *errata corrige* nobis conficiat, namque & ipſe in hujuſmodi operibus componendis multum valet, & nos quidem laborem ita refugimus, ut niſi quiſpiam occurrat, qui eum ſuſcipiat, videatur nobis aliquis vel pretio invitandus. Atque ex his utique itelligat Anonymus velim, ſe, quod Manfredianarum Ephemeridum errores collegerit, & publicos fecerit, non modo non moleſtam operam Manfredio, ejuſque ſociis præſtitiſſe, id quod vereri ſe valde (quæ ejus ſcilicet modeſtia eſt) in præfatione ait, ſed etiam jucundam. Nam niſi jucunda eſſet, neque ejus libellum iterum ederemus, neque ipſum hortaremur, ut alium talem in Ephemerides noſtras componeret, neque demum monendum putaremus, ut eſſet in his errorum catalogis deſcribendis in poſterum accuratior. Nam quamvis in hoc quem edidit, multa probemus, ſunt tamen alia, in quibus diligentiam modo, modo ingenium requiramus. Et ſane ubi Anonymus notam ℞ deſiderari interdum in Ephemeridibus Manfredianis animadvertit, quis ipſum non laudet? cum ex ipſis ſuſcriptis numeris plane conſtet

Pla-

Planetam eſſe retrogadum, cujus rei illa nota indicium eſt. Itemque ubi litteram h pro d adſcriptam eſſe docet, iis præſertim in locis, in quibus deſignari digitos non horas, nemo eſt quin re ipſa admonitus ſatis intelligat, quis non probet? Illud vero præclarum: quod Manfredius ſcilicet conjunctionem Jovis cum Sole interdum notavit, cum eſſet potius Solis cum Jove notanda; nam quamvis hæc duo reciprocentur, ut alterum ſine altero eſſe non poſſit, erat tamen Sol, ut qui nobilior eſt Jove (non enim hic poetas audire volumus) primo loco nominandus. Addit etiam Anonymus & in diebus cujuſdam menſis numerandis inter diem 12, & diem 14. excidiſſe Manfredio diem 23 pro 13, & in paginarum numeris ſtatim poſt 231 in numerum 332, mutato 2. in 3, Manfredium lapſum eſſe, & alia permulta hujus generis. Præclare. Probantur hæc nobis, & laudantur ſummopere; nam & ad *errata corrige* proprie pertinent, & niſi talia Anonymus collegiſſet, libellum hunc multo leviorem feciſſet, ſuumque emendandi ſtudium nimis anguſtis finibus terminaſſet. Quamquam hujuſmodi errores perſequens, poterat etiam vagari latius. Poterat enim & in menſe Martio Anni 1727. animadvertere dominicalem litteram in facie dextera e ſuo loco deturbatam fuiſſe, & in ſubjectam lineam, ubi minime reſidere debebat, rejectam; & in menſe Decembri Anni 1728 in ſiniſtra facie, ubi menſis dies numerantur, numerum 14. ceſſiſſe loco, & extra lineam conſediſſe; itemque in Anno

1729. vigilium S. Jacobi, quod in die Sabbati conſiſtere debuiſſet, in dominicum ſequentem diem excurriſſe. Quæ omnia nobis, quaſi aliud agentibus, animadverſa Anonymum perveſtigantem diligenter ſingula, quod ſane fidem vix capit, prætererunt. Quo minus cauſæ erat, cur Manfredio, ejuſque ſociis ſuccenſeret, quod interdum nonnulla, judicio ejus, omiſerint. Quamquam ne erat quidem, cur reprehenderet, ſi quid uſquam in iis, quæ notaverunt, per errorem lapſi ſunt. Qui eſt enim liber uſque adeo integer, ut mendis omnibus careat? At inquies, calculos ſubduxit Anonymus; erraſſe millies invenit. Errorum numerus non ferendus. An hæc omnia errarunt Manfredius, & ſocii? Nihil typographi? Nihil amanuenſes? Atqui exemplaria ſunt in manibus, ſupputationibus neque ullis eraſis, neque, niſi perpaucis, inductis, eaque, ſi Deo placet, proferre poſſumus, quibus oſtendamus, quam multa vel amanuenſibus, vel typographo exciderint, contra quam a Manfredio, & Sociis ſcripta erant. Et vero errores huc ſpectant pene omnes, quos Anonymus adnotavit ſive in longitudinibus, ſive in latitudinibus, ſive in declinationibus trajectionibuſque Planetarum, iique præſertim, ubi numerorum ordo apertiſſime pervertitur, itemque illi, in quibus vel ſolidi unius gradus error ineſt, vel ex una hora in alteram excurritur minutis nullis interjectis, vel alterum Zodiaci ſignum pro altero ponitur, vel demum gradus longitudinis ſupra 30, tum declinationis Solis ſupra 23,

vel

vel denique horæ ſupra 24 numerantur. In quibus omnibus quis uſque adeo ſtupidus eſt, quin vel typographi, vel amanuenſis vitium agnoſcat? Quis etiam eſt, qui hiſce erroribus offendatur, qui ipſi ſtatim ſe produnt, Lectoremque admonent, ut emendet? Eſt autem emendandi ratio ex ipſa numerorum, vel ſignorum ſerie cuique paratiſſima. Neque vero dubitandum eſt, an Manfredii, & Sociorum autographa, quæ nos cuivis non invito libentiſſime proponemus, poſt ab iis exarata fuerint, quam Anonymi liber prodierit, & ex Anoniymi liber prodierit, & ex Anonymi reprehenſionibus emendata; nam neque laborem hunc tantum Anonymi cauſa ſuſcipere voluiſſent, ut paginarum millia exſcriberent, neque ſi voluiſſent, potuiſſent: quippe illorum unus, ideſt Veberus, jamdudum in Hiſpaniam profectus eſt, duo, ideſt Nadius, & Banderius, deceſſerunt. Sed quid ego hæc? Fac millies in Manfredianis Ephemeridibus erratum eſſe; idque eſſe Manfredio, ejuſque Sociis culpæ vertendum. Nihil peccaverint amanuenſes. Nihil typographus. Illa ipſa autographa, quæ ſupra memoravimus, nulla ſint. Quo in libro tandem, quotue in chartis hæc erraverunt? in quinquaginta? In centum? turpe eſſet tam multa erraſſe in tam paucis. Ne in trecentis quidem ignoſcerem. At vero cum illa erraverint in tomis tribus grandioribus, quartam folii partem amplitudine æquantibus, paginas ſupra mille complexis, quid eſt demum, cur illos Anonymus uſque adeo in-

inſectetur, ut clamores tollat, ac cum typographis, & amanuenſibus tacite veniam dederit, *quæ correctorum excuſatio ſit*, quærat? Quæ excuſatio? Nempe eadem, quæ Anonymi. Cur enim Manfredio & Sociis in paginis grandioribus ſupra mille errare millies non licuerit, cum Anonymo in pagellis ipſis quadraginta quinque licuerit nonagies? Nonagies vero? Immo multo plus. Nam nonagies cum dico, ommiſſiones Anonymi miſſas facio; quas ille in Manfredianis erroribus colligendis non prætermiſit. Ac ne id temere videamur dicere, & ſine cauſa, catalogum errorum, quos admiſit Anonymus, in fine hujus libri proponemus; qui errores apparebunt etiam hoc ipſo in libro; nam hanc editionem ex illa Moræ Veneta, quoad ejus fieri potuit, accuratiſſime exprimi juſſimus, & plane ad verbum. Neque vero typographiæ vitio omnes dandi ſunt; ſunt enim non pauci, in quibus ratio & judicium apparet certiſſimum, ut non typographi incuria, ſed auctoris ſollertia accuſanda ſit ingenioſi & docti ad errandum. Quod ſi Anonymus in libello tantulo, quantulus iſte eſt, errores ferre potuit amplius nonaginta, quid eſt cur pauciores ferre non poſſit in tomis Manfredii tribus grandioribus? Pauciores, inquam, nam ſi proportione utimur cujus ſane ratio aliqua habenda eſt, quid eſt tandem mille errorum in magnis paginis pluſquam mille ad errores pluſquam nonaginta in pagellis quadraginta quinque? Quam proportionem ſi errando Manfredius ſecutus eſſet, næ illi errores admittere

licuiſ-

licuiſſet, quotquot voluiſſet; quæ eſt enim uſquam tanta errorum copia, quam lenis iſta, & liberalis proportio non excuſet? Vereor, ne Anonymum videar reprehendere. Sed monendi ſtudio, & quaſi re ipſa ducti neſcio quomodo ad ejus errores delapſi ſumus. Itaque hos mittamus. Cetera, quæ ſecuntur, & brevius dicamus, & ſi fieri poteſt, lenius; monere enim volumus, non reprehendere. Quamquam non illud ſane monebo, quod tamen veriſſimum eſt, turpe eſſe eum, qui reprehendat, reprehenſionis cauſam afferre nullam: nam quamvis Anonymus & plagii Manfredium inſimulaverit, quod numeros quoſdam ex aliorum Ephemeridibus exſcripſerit; & præterea id neget, quod Manfredius affirmaverat, ſupputationes in Marte, Venere, & Mercurio modo in quinos, modo in binos dies, modo etiam in ſingulos ex tabulis fuiſſe iteratas; & inſuper Manfredianos calculos in Mercurio præcipue improbet, quod ex aliis numeris ad alios progredientes intermedios haud paucos celeritate non ferenda tranſiliverint; neque harum accuſationum cauſam omnino ullam afferat; ſi id tamen monerem, viderer fortaſſe, inſtare vehementius, & reprehendere. Nam certe in hac poſtrema citanda erant loca aliqua, quæ ipſe nulla citavit: duas vero alias nulla ratione probare poterat; habemus enim autographa in manibus, ut ex ſupputationibus ipſis appareat, & quotum quemque in diem initæ ex tabulis fuerint, neque ullos numeros ex aliorum Ephemeridibus fuiſſe depromtos.

Sed

Sed amice agamus, & aliquid, ſi poſſumus, aliquando concedamus. Concedimus ergo Manfredium, cum Planetarum motus ad calculos modo in quintum, modo in decimum quemque diem ex tabulis revocaſſet, numeroſque intermedios in dies ſingulos diſtribuiſſet, idque pluſquam novies millies feciſſet (non enim pauciores diſtributiones anni ipſi triginta ſex, ad quos Ephemerides ſuas produxit, ferebant) in locis lapſum eſſe novemdecim. Quid vultis amplius? Id ipſe concedit Manfredius, ſe, cum novies ſupputationum millia, eoque amplius, rectiſſime iniverit, in novemdecim offendiſſe. Cur enim id non concedat ſe admiſiſſe, quod reprehendere turpius ſit, quam confiteri? Et quoniam aliquid concedere Anonymo inſtituimus, demus etiam, ſi vult, Planetarum adſpectus, atque ipſas, ſi Deo placet, Lunæ phaſes in Manfredianis Ephemeridibus haud raro perperam, quemadmodum Anonymus animadvertit, notatas eſſe; neque uſquam culpam in typographum conferamus; Manfredium & Socios, quod veriſſimum eſt, diligentes minus in hiſce adſpectibus & phaſibus perſequendis ſe præſtitiſſe, quam in aliis partibus, confiteamur. Cur enim de his admodum laborarent, quæ uſque adeo futilia ſunt, ut nemo Aſtronomorum unus ea curet, quæque Manfredius bibliopolæ tantum cauſa Ephemeridibus adjunxit ſuis, veriti ſcilicet, ne ſi Lunæ præſertim phaſes deſiderarentur, minus multi ad librum emendum accederent. Audiverat enim hæc & Frugnolo, & Sabbadono, & Roſaccio, aliiſque hu-

hujus generis ſcriptoribus probari vehementer. Itaque tantum curæ & laboris in his ponendum eſſe cenſuit, quantum vel Sabbadono vel Roſaccio ſatis eſſet; qui ſi illos Planetarum adſpectus, Lunæque phaſes requirunt; ut futura hominum eventa prænuncient, & quod cuique impendeat fatum ex nataliciis ſideribus doceant, nihil ſane refert, utrum phaſes illæ & adſpectus, quos notaverint, cum veritate ipſa plane congruant, an hora aberrent una aut altera. Utrum enim putamus veriora prædicturum: eum, qui ex certiſſimis Planetarum adſpectibus futura præcinat, an eum, qui ex dubiis, vel etiam ex fictis? Quod ſi qui dubitant, ii nulla ratione convincendi ſunt: rogandi potius, ut experimentum ſumant. Nobis ergo non modo non reprehendendus, ſed etiam commendandus videtur Manfredius, quod in hac parte diligentiam tantam poſuerit, quantam res ipſa, atque uſus poſtulabant, laborem pene omnem & curam ad ea tranſtulit, in quibus erat aliqua Aſtronomorum exſpectatio: puta ad Lunæ tranſitus per meridianum circulum in ſingulos dies ita conſtituendos, ut nunquam minuto integro aberrent: puta ad declinationes Lunæ, trajectioneſque Planetarum: puta ad appulſus Planetarum cum ſe ad invicem, tum ad ſtellam quamque primariam: puta ad Lunæ cum Planetis conjunctiones: puta ad Eclipſes in geographicis Tabulis per lineas curvas cum horarias, tum digitales, atque horizontales repræſentandas: quæ omnia ſi nullo negotio aut labore confici poſſe Anonymus

putat, ut mirari Manfredium videatur, qui Socios in partem operis advocaverit, quin ergo ipſe manum operi admovet? Quin hujuſmodi ſupputationes nobis expedit in alios viginti quinque annos? Adjungat etiam adſpectus & phaſes illas ſuas. Næ ille magnam ab Aſtronomis, atque adeo a nobis ipſis inibit gratiam, ſi hæc & ſolus præſtiterit, & recte, & celeriter. Neque hæc tamen ſic dico, quaſi Anonymus non illa indicare in ſuo libro debuiſſet, quæ ſunt a Manfredii ſociis in Lunæ phaſibus, & Planetarum adſpectibus minus diligenter notata. Id enim ad illud, quod præclare inſtituerat, *errata corrige* abſolvendum requirebatur. Erat etiam Sabbadono conſulendum. Sed ſunt alia, quæ ad id minus pertinent, quibuſque mallem Anonymus abſtinuiſſet. Quis enim hominem ferat quærentem, cur Planetarum tranſitus per meridianum circulum, & declinationes in Ephemeridibus notentur, vel improbantem Bayeri notas ad ſtellam quamque fixam deſignandam, vel mirantem denique quod in primo Manfredianarum Ephemeridum tomo deſit tabula, e qua Planetarum, quorum utique latitudo eſt aliqua, declinationes eliciantur? Ego vero nihil miror, hominem in perquirendis erroribus attentiſſimum perfectiſſimam, abſolutiſſimamque tabulam non inveniſſe. Quid vero ubi motum lunaris nodi, quem ipſe *medium* vocat, quemque in Ephemeridibus Manfredius notaverat, reprehendit? quaſi vero Aſtronomi nulli ſint, quorum opinione ejus motus inæqualitates uſque adeo ſunt exiguæ,

guæ, ut niſi longo intervallo ſub ſenſum cadere nequeant. Quid cum admiratione afficitur, quod in Saturni motibus corrigendis minutorum ratio ſit habita non amplius octo, cum interdum aberraſſe hunc planetam compertum ſit minuta ad viginti? hoc eſt quidem in Aſtronomia hoſpitem plane eſſe. Et is rogat lectores, ut ſi quando Manfredianas Ephemerides perlegerint, riſum teneant? Quid eſt vero cur rideant? Nempe quod cujuſque Eclipſeos ſupputationem, quo certior eſſet, tribus ſe modis iniviſſe Manfredius profitetur, Eclipticis primum tabulis, tum ſchemate, deinde ratione trigonometrica. Quid eſt, obſecro, quod hic loci lectores rideant, niſi ſi Anonymi recordentur? Sed veniamus ad id, quod caput eſt, & ſummam habet. Primum Manfredianæ Ephemerides cum planetarum motibus non conſentiunt: deinde Ephemerides aliæ extant multo emendatiores, quas Aſtronomi utilius conſulant. De hoc infra diſſeremus. Sed illud primum quibus tandem perſuadere conatur Anonymus? Nam nobis quidem non poteſt, qui tres abhinc annos eoque amplius teleſcopio ad muralem ſemicirculum adhærente tum omnes ſimul, tum terni, tum bini planetas in meridiano ipſo circulo vel interdiu captantes, plane percepimus, atque oculis ipſi noſtris vidimus tantam eſſe inter planetæ cujuſque motum & Manfredianas Ephemerides conſenſionem, quanta poteſt ab non iniquis æſtimatoribus poſtulari. Quis enim umquam planeta in meridiano extitit non eo tempore, quod Manfredius indicaverat,

eaque altitudine, quæ ex declinationibus in ejus Ephemeridibus notatis colligebatur? ſi modo duorum triumve minutorum differentiam interdum negligas, quam differentiam in re uſque adeo ſubtili Aſtronomus quiſque peritiſſimus parui faciet, eoque libentius Manfredio ignoſcet, quod ſæpiſſime ne unum quidem minutum a veritate aberraverit. Quid quod ſæpe differentiam citra dimidium minutorum conſiſtere compertum eſt? cujus rei teſtimonia afferre poſſem & noſtra, & Joſephi Bolſii Marcheſii hominis diligentiſſimi, & Jacobi Parmæ harum rerum ſtudioſiſſimi, & ejus demum, qui pro illa, quæ ſibi cum his intercedit amicitia, ad inſtituti ſpeculam noviſſime acceſſit, Franciſci Algarotti adoleſcentis optimi, & omni laudum genere ornatiſſimi, quorum cum alii calculos ſubducerent, alii ad obſervationem ſe conferrent, tanta ſæpe extitit inter utroſque conſenſio, ut admirabilitatem habere quamdam videretur. Sed quid teſtimonia proferamus, ubi & concedere, quod Anonymus vult, poſſumus, & Manfredium tueri nihilominus? Non conſentiunt Manfredianæ Ephemerides cum Planetarum curſu? non conſentiant. Quid tum? Num illæ idcirco reprehendendæ? Quid ſi etiam non minus probandæ, quam ſi præclare, ſi egregie, ſi plane conſentirent. Quis enim ignorat, non eam proprie Ephemeridum laudem eſſe, ut plane cum veritate conſentiant, ſed potius tabularum, unde illæ ductæ fuerunt? Nam quamvis jucundum ſit futuros planetarum curſus vere prædicere, nihilominus

qui

qui Ephemerides condunt, cum prædictiones ſuas ex his vel illis aſtronomorum tabulis numquam non colligant, ſupputandi diligentiam præſtare debent, veritatem non debent; poteſt enim in tabulis inſediſſe error, quem niſi Ephemeridibus confectis comparatiſque diligenter cum obſervationibus non agnoſcas. Eamque ob cauſam valde optandum eſt, ut cum aliæ tabulæ ab aliis confectæ fuerint, Ephemerides alias ex aliis conſcribant quam plurimi; ſic enim ſi cum reipſa, & veritate conferantur, tum denique apparebit quæ tabulæ utiliores ſint, magiſque ad verum accedentes. Qua propter Manfredius, noſque ipſi Antonium Ghislerium Virum Nobiliſſimum, Epiſcopum Azothenſem ſummis laudibus efferre ſolemus, qui cum Juris Legumque ſcientia, quam in Publico Bononienſi Archigymnaſio multos annos profeſſus eſt, in primis floreat, idemque Poeta ſit probatiſſimus, ad cæteras laudes illud etiam adjunxit, quod Ephemerides in multos annos emiſit ex aliorum tabulis conditas eodem pene tempore, quo ſuas Manfredius conficiebat e Caſſinianis. Cujus rei cauſa literati homines numquam ei plurimum non debebunt. Quod vero ait Anonymus Ephemerides alias eſſe emendatiores multo quam Manfredianas; quas ille emendatiores vocet, neſcimus. Sed ſi illas intelligit, quas nos non utique emendatiores, ſed emendatiſſimas dicere ſolemus, propterea quod Typographo permulta tribuimus, non ſane videmus cur ſint Manfredianis anteponendæ. Quippe qui Anonymi libro accepto illas

las ſtatim in manus ſumſimus, in eumque, qui tum exibat, Novembrem menſem quaſi per otium inquiſivimus. Quid putatis? in ipſis triginta diebus errores invenimus, quos quidem in Typographos partim, partim in Amanuenſes reiicimus, quadragintaquinque; quot ſcilicet in binis quidem, ternisve annis vertentibus in Manfredianis inveneris. Ac ne id per exaggerationem quamdam videamur dicere, ipſos ſtatim errores ſubjiciemus.

. . . .

Viden' quam multa ſint unius menſis flagitia? Et ſunt, qui putant Ephemerides ullas edi poſſe typographo nuſquam peccante? quid quod idem menſis in Venere ſemper labitur, nam latitudines ubique Heliocentricas pro Geocentricis indicat; qui error non hoc uno in menſe inſidet, ſed manavit ad multos. Verum alios mittamus; hujus certe hi ſunt lapſus.

. . . .

An poterat major eſſe inter unum hunc menſem Veneremque diſſenſio? Quis enim eſt dies, quo oriri Venus & progredi Cœlo poſſit, quin ſit illi cum hujus menſis ſupputationibus vel de gradu vel de minutis aliquot diſceptandum? At melior fortaſſe erit hic menſis in Mercurio. Immo vero longe vitioſior. Quæ eſt enim longitudinum diſtributio non perverſiſſima?

. . . .

Quis Planetam agnoſcat in tanta longitudinum per-

perverſitate ? Quæ omnia quamvis Typographis vel Amanuenſibus vitio vertimus, nihil eſt tamen cur Ephemerides iſtas, quibus tantæ cum Planetis duobus nobiliſſimis rixæ ſunt, meliores eſſe putemus, quam Manfredianas. Illud poſtremo Anonymus monendus eſt, ut quando errores quoſdam in eo libro animadvertiſſe ſe prædicat, quem ſuperiore anno Manfredius edidit *de Annuis inerrantium Stellarum aberrationibus*, quos errores ſummi, nobiliſſimique Viri cauſa, cui librum illum Manfredius conſecraverat, notare ſe nolle ſignificavit; ne hanc ob rem ſe contineat, ſed errores omnes illius libri, & colligat & indicet & coarguat; quamvis enim Vir ille ſummus librum ſibi dicatum fuiſſe putet, errores tamen non putat. Laborem hunc ergo ut ſuſcipiat, Anonymum etiam atque etiam rogamus. Nihil gratius facere poterit.

FINIS.

1410079

~~F 27006~~ bis

Vidit D. Philippus Maria Toſelli Clericus Regularis S. Paulli, & in Eccleſia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro Eminentiſſimo, & Reverendiſſimo Domino Domino Andrea Cardinali Joannetto Ordinis Sancti Benedicti Congregationis Camaldulenſis, Archiepiſcopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

Die 6. Januarii 1780.

IMPRIMATUR.

Fr. Aloyſius Maria Ceruti Vicarius Generalis Sancti Officii Bononiæ.

527006

Digitized by Google

Digitized by Google